

next 18.09

1) Модель классической механики.

- закон механики в E,
- пространственная кривая (пути)

и соотв. импульсы.

Валерья Жарго

Модель Леонтьева

2) Экономика

(баланс)

3) модели коллективного поведения

Жарго динамика программ
(размещение денег в банках)

опт. управление (поведение рекламных агентств)

① механика Аристотель

тел: 3 типа:

- вечно в покое: земля
- вечно в движении: Солнце (планеты)
- вынужденно движутся

$$\vec{F} = \alpha \vec{v}$$

$$\vec{F} = \alpha \vec{v}$$

Птолемей - расчеты (вокруг земли) $\vec{F} \propto (\vec{v} - \vec{v}_0)$

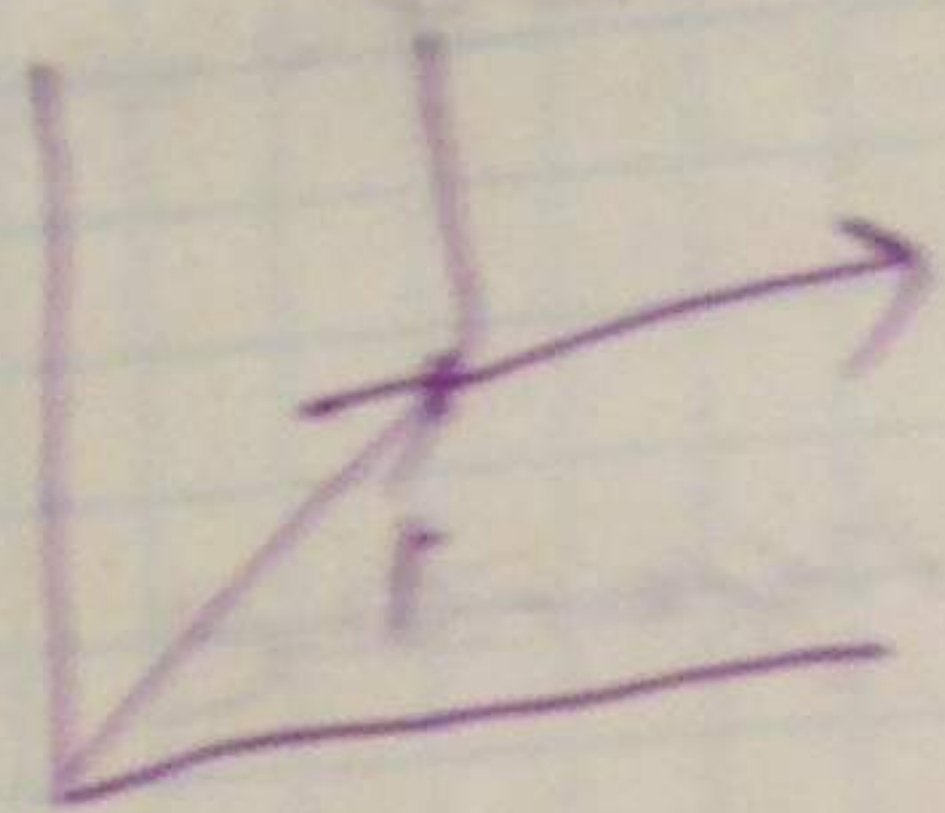
Бруно
Галилей
Коперник

Теория Лапласа: Мир
(тогда)

Красноуцек
Принципы
модели
мату

Петров
построение

инерциальная система отсчета



$$\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\vec{r} = \vec{r} + \vec{r}'$$

$$d = v + v'$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} + \vec{v}', \quad \vec{f} = d\vec{v}$$

то же во всех измерениях.
пункты и морены.

преобразование

преобраз. координат
не по Раммелвенд
функции

$$\vec{r} = \vec{r} + \vec{r}'$$

$t = t'$ - время во всех ин. сист. функци

2-мерная - морены

исходно

$$E = mc^2$$

Принципы наименьшего действия / лагранжиан

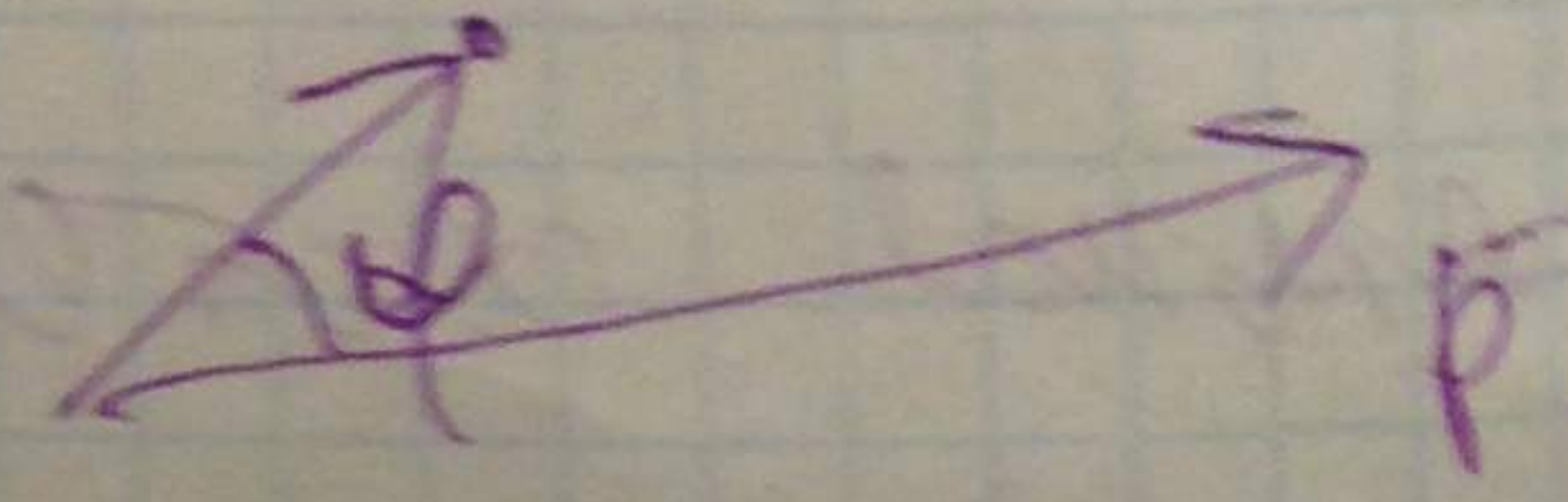
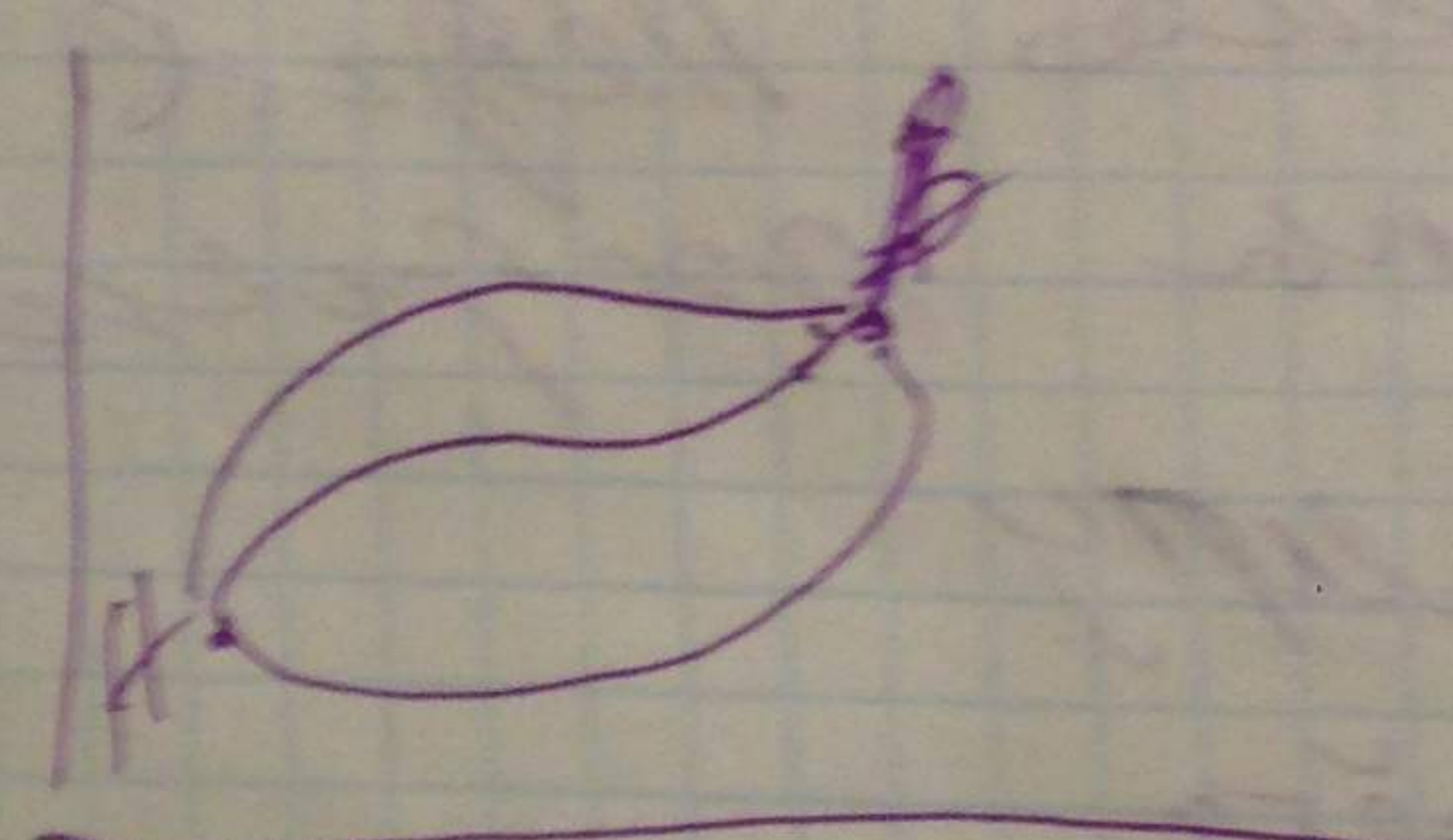
$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) dt$$

исходно
действие

$$x = x(t)$$

генератор координ.



обобщ. коэф. - $\vec{q}$,
 $\vec{q}$

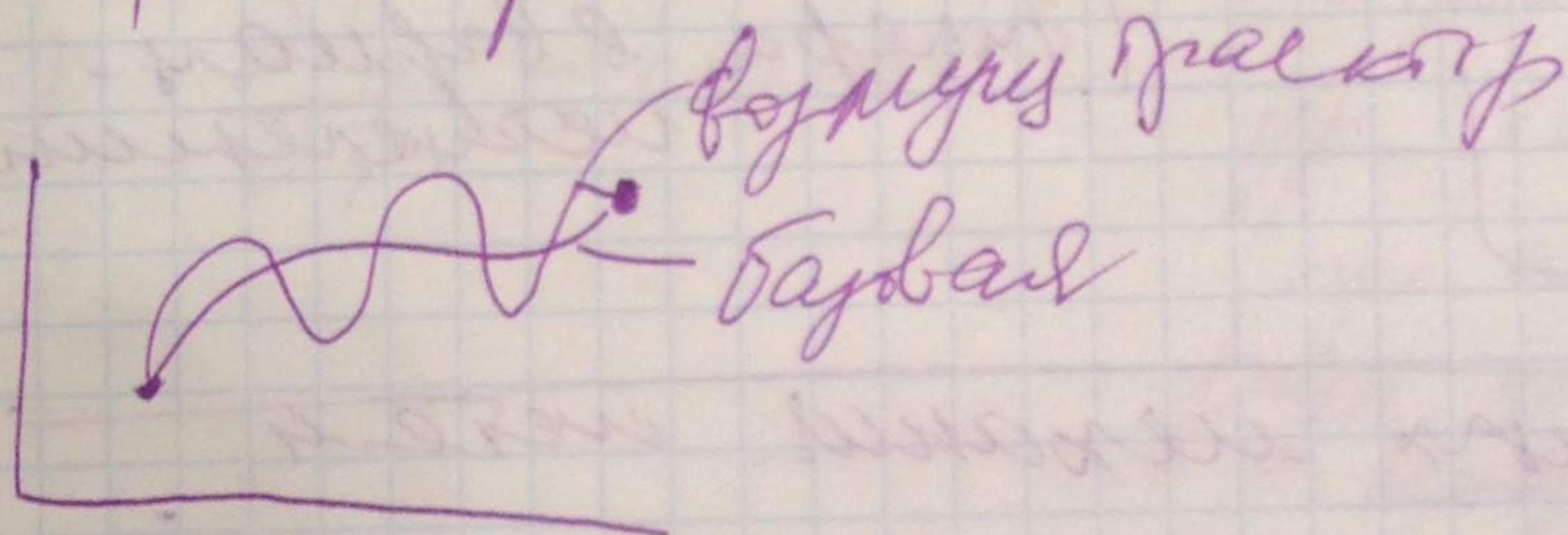
системе N масс

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}_1, \dot{\vec{q}}_1, \dots, \dot{\vec{q}}_N, t) dt$$

$\rightarrow \min$

пр. Лагранжа (в вариационном исчислении - Эйлера)

ΔS - вариация действия



$$S_1 - S_0 = \delta S + \delta S^2 + \dots = 0.$$

варьируем по параметрам, от-
 гакреним.

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{q}_1} \delta \vec{q}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_1} \delta \dot{\vec{q}}_1 \right) dt, \quad \delta \dot{\vec{q}}_1 = \left(\delta \vec{q}_1 \right)'$$

$$\delta \dot{\vec{q}}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{q}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{q}_1}, \frac{\partial L}{\partial \vec{q}_2}, \dots \right)$$

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{q}_1} \delta \vec{q}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_1} \delta \dot{\vec{q}}_1 \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \vec{q}_1} \delta \vec{q}_1 dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_1} \cdot \delta \vec{q}_1(t) \right|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_1} \delta \vec{q}_1$$

поэтому под палкой 0.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_1} = \frac{\partial L}{\partial \vec{q}_1}$$

уравнение механики

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_i} = \frac{\partial L}{\partial \vec{q}_i}$$

→ это часть диф. ур-ий
— упр. Лагранжа
(затем в вариационном исчислении)

Форм. 1. где лагранжиан механической системы

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

полная лаг.

$$L' = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + f(t)$$

полная производная

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} L dt + \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt = S + f(t_1) - f(t_0)$$

время фиксировано $\Rightarrow$ ф. лаг. где точки не зависят от времени.

Форм. 1 не зависит от координат

Нрво. упр. Лагранжа не зависит от вектора

а только от скорости $|\dot{\vec{q}}|$

$$v^2 = |\dot{\vec{q}}|^2$$

h. зависит только от v^2

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0.$$

$$\frac{\partial L(v^2)}{\partial v_x^2} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 =$$

$$= \frac{\partial L(v^2)}{\partial x} + \frac{\partial L(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial L(v^2)}{\partial z} = \frac{\partial L}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial v_x} \right)$$

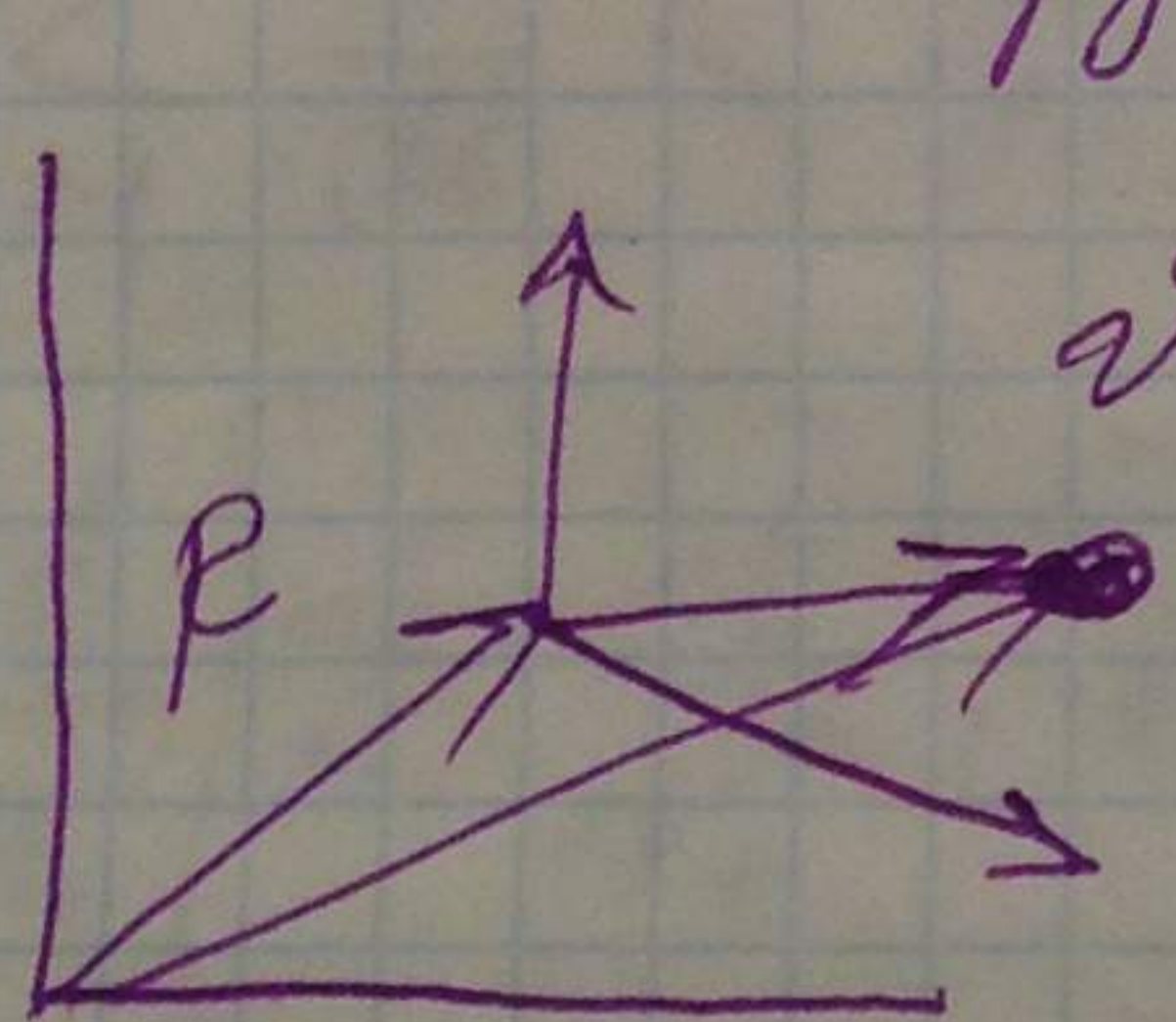
$$\left(\frac{\partial z}{\partial v_x}, \frac{\partial z}{\partial v_y}, \frac{\partial z}{\partial v_z} \right) = 2 \frac{\partial L}{\partial z} (v_x, v_y, v_z) = 0.$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial z} = \text{const.} \right]$$

- год что год по
ур-дарт не меняется
при переходе к
другой сист. отсчета
координат.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) = 2 \frac{dL}{dz} \left(\vec{v}_x, \vec{v}_y, \vec{v}_z \right) = 0$$

Если мас. точки в равных инерц.
сист. координат.



$$\vec{r} = \vec{v}$$

$$\vec{v} + \vec{v}$$

$$L((\vec{v} + \vec{v})^2)$$

$$= L(\langle \vec{v} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{v} \rangle)$$

$$|\vec{r}|^2 = \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle$$

скал. произв

$$= L(v^2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + v^2) =$$

Лагранже

$$\left\{ f(x_2) = f(x_1) + f'(x)(x_2 - x_1) \right\}$$

$$= L(\vec{v}) + \frac{dL}{d\vec{v}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = L(\vec{v}) + \frac{dL}{d\vec{v}} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 \right)$$

no apr. $(\langle \vec{v} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{v} \rangle)$

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = L(\vec{v}, \vec{v})$$

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$$

lecture 2

29/2

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} - \mathcal{V}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0, \quad i = \overline{1, N}$$

$$m_i \frac{d}{dt} \vec{v}_i = - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \vec{r}_i}$$

$\vec{F}_i$

где $\vec{F}_i$ — сила взаимодействия между частицами

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i$$

Закон сохранения

энергии механической системы, если потенциал не зависит от времени

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}, \vec{v}_i \right\rangle + \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}, \vec{\dot{r}}_i \right\rangle + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ — скалярное произведение

если $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, то L не зависит от времени

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}, \vec{v}_i \right\rangle + \left\langle \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}, \vec{\dot{v}}_i \right\rangle \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}, \vec{v}_i \right\rangle = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}, \vec{v}_i \right\rangle$$

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}, \vec{v}_i \right\rangle - L \right] = 0$$

$= \text{const}$, от t не зависит.

$$\sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}, \vec{v}_i \right\rangle - L = \text{const}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_j} = \left(\frac{\partial L}{\partial v_{jx}}, \frac{\partial L}{\partial v_{jy}}, \frac{\partial L}{\partial v_{jz}} \right) = m_j (v_{jx}, v_{jy}, v_{jz}) = m_j \vec{v}_j$$

$$\sum \langle m_i \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} + v(\vec{r}_i, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_N) = \text{const}$$

$$\sum \frac{m_i v_i^2}{2} + v(\vec{r}_i \dots \vec{r}_N) = \text{const}$$

потенц.

Молная энергия замкнутой системы
клетки постоянна

$$T + v = \text{const}$$

$$\vec{P} = \sum_N m_i \vec{v}_i \quad \text{— импульс}$$

отсутствие = прб однородно.
(прб однородно если нет внешних
полей и взаимодействий)

$$L(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, \vec{v}_1 \dots \vec{v}_N)$$

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{f}_i, \quad i \in N$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{f}} = 0$$

$$\frac{dL}{d\vec{f}} = \sum \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 \quad (1)$$

$$L(\vec{r}_1 + \vec{f}_1, \dots, \vec{r}_N + \vec{f}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N)$$

$$0 = \sum_N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \frac{d}{dt} \sum_N \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \frac{d}{dt} \sum_N m_i \vec{v}_i = 0$$

$$L = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} - v(\vec{r}_i \dots \vec{r}_N)$$

$$-\sum \frac{\partial v}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

равно весу сил
действ. со стороны
спрва и влево = 0
3 м. измерения

= const

$$\vec{P}_{12} + \vec{P}_{21} = 0$$

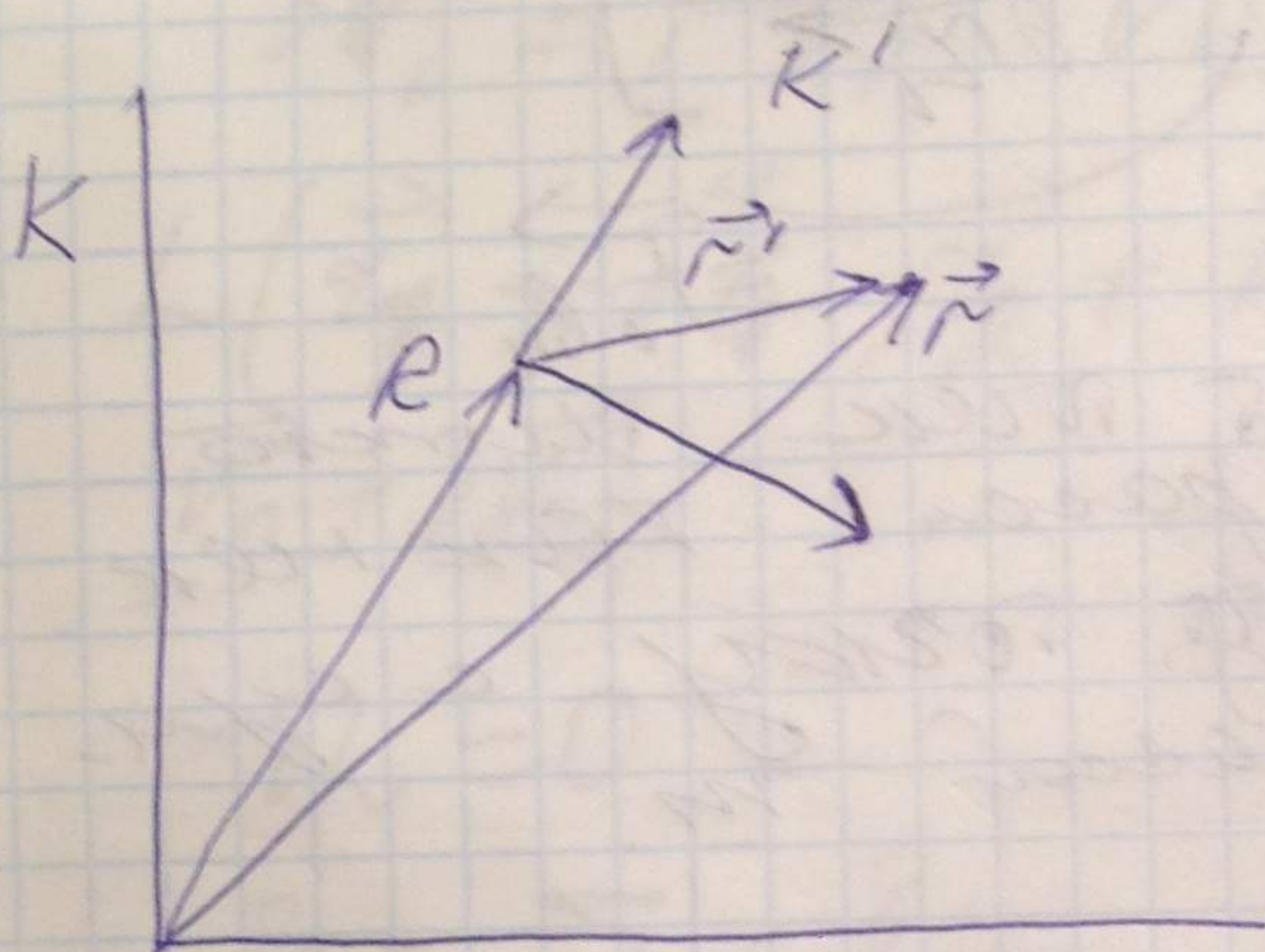
мех. центр масс
свой: принцип
наименьшего действия

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

V-поле от 1-х independent
from masses

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} - \frac{\partial \vec{P}_{i+1}}{\partial t} = 0$$

$$V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{r}_2 - \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_{N-1} - \vec{r}_N)$$



$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{R} + \vec{r}' \\ \vec{v}_i &= \vec{V} + \vec{v}_i' \\ P &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{V} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i' \\ &= \vec{V} \sum_{i=1}^N m_i + \vec{P}' \end{aligned}$$

$$\vec{P} = \vec{P}' + \vec{V} m$$

мех. центр масс в K' $P' = 0$

$$\vec{P}' = 0 \quad \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} = \vec{V} \quad (3)$$

$$m \vec{V} = \vec{P}$$

$$\vec{P} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m}$$

центр инерции

система 2 тел как в. во внешнем поле

$$L = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) - V_{\text{вн}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

$$L = \sum$$

вектор
момента
= 0

$$L = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) - V_{BH}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} = - \frac{\partial V_{BH}}{\partial \vec{r}_i}$$

$$\frac{d}{dt} \sum m_i \vec{v}_i = - \sum \left[\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} + \frac{\partial V_{BH}}{\partial \vec{r}_i} \right] = \vec{F}_{BH}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{BH}$$

$$\vec{F}_{BH} = \sum \vec{F}_{iBH}$$

систему можно рассматривать как точку с суммарной массой m .

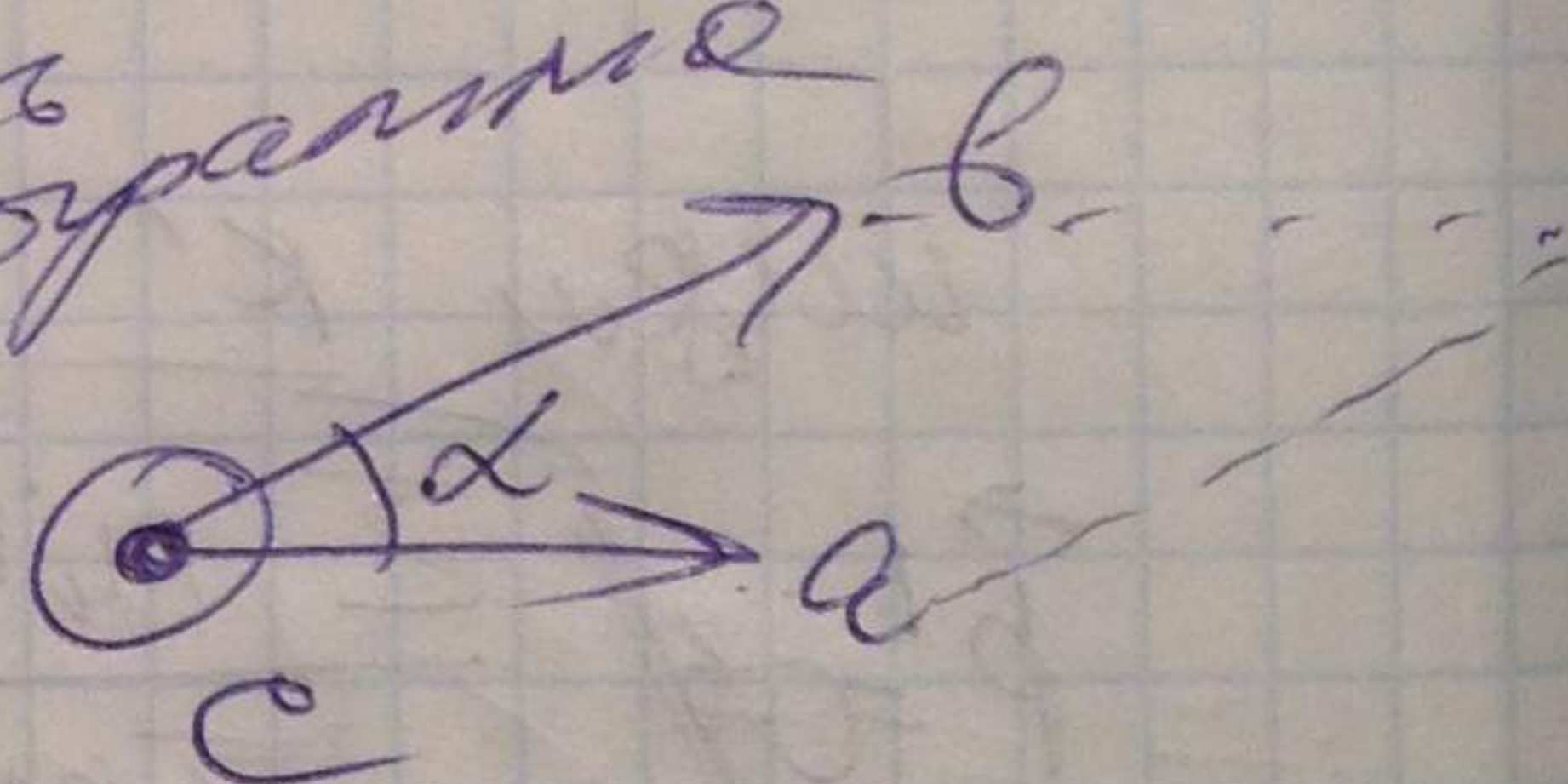
Циркуляция крива.

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{c}$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$$

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = -[\vec{b} \times \vec{a}]$$

матрица параллелограмма



если a и b коллинеарны то $c = 0$ ($\sin \alpha = 0$)
смешанное произведение

$\langle \vec{c}, [\vec{a} \times \vec{b}] \rangle$ — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$V_{\langle \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \rangle} = V_{\langle \vec{b}, [\vec{c} \times \vec{a}] \rangle} = V_{\langle \vec{a}, [\vec{b} \times \vec{c}] \rangle}$$

$$|dr| = |\vec{r}| |d\phi|$$

$\int d\varphi$ - берем: $d\vec{\varphi}$

$$[d\vec{\varphi} \times \vec{r}] = d\vec{r}$$

применение де сьогнарим δ

$$\partial\varphi = \delta\varphi$$

$$\partial\vec{r}_i = [\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i]$$

$$\delta\varphi = \text{const}$$

$$\delta\vec{v}_i = [\delta\vec{\varphi} \times \vec{v}_i]$$

$$L(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1, \vec{r}_2 + \delta\vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n + \delta\vec{r}_n, \vec{v}_1 + \delta\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n + \delta\vec{v}_n)$$

$$\delta L = 0$$

$$\delta L = \sum \left[\left\langle \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}, \delta\vec{r}_i \right\rangle + \left\langle \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}, \delta\vec{v}_i \right\rangle \right] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = m_i \vec{v}_i = \vec{p}_i \quad \Rightarrow \quad m_i \vec{v}_i = \vec{p}_i$$

$$\sum_{i=1}^N \left[\left\langle \vec{p}_i, [\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i] \right\rangle + \left\langle \vec{p}_i, [\delta\vec{\varphi} \times \vec{v}_i] \right\rangle \right]$$

где $\vec{p}_i$ - импульс

$$\langle \delta\vec{\varphi}, \vec{r}_i [\vec{v}_i \times \vec{p}_i] + [\vec{v}_i \times \vec{p}_i] \rangle = 0$$

$$\langle \delta\varphi, \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \times \vec{p}_i] \rangle = 0$$

$$\delta\varphi = \text{const}$$

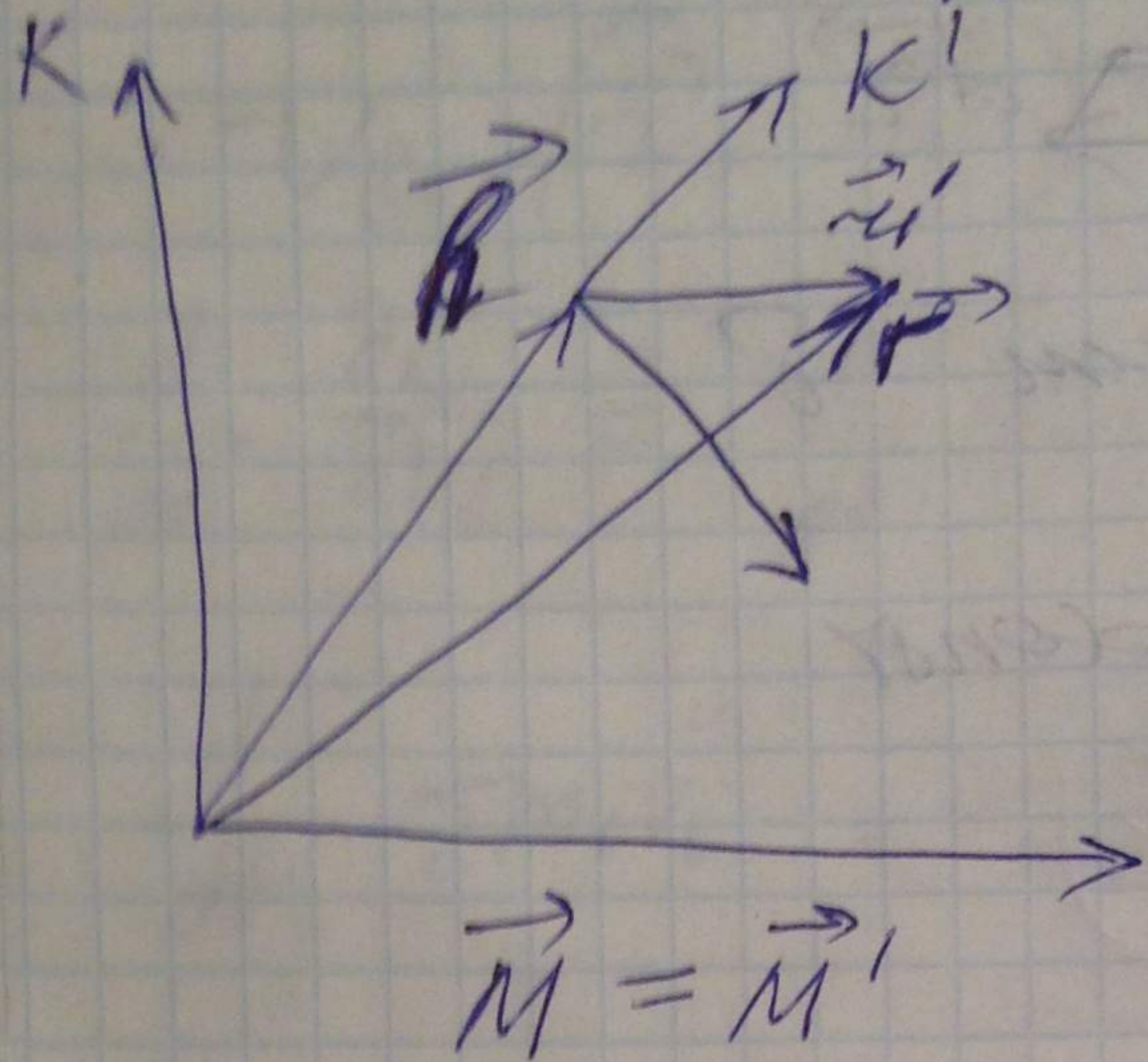
$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \times \vec{p}_i] = 0$$

M момент количества движения

$$\frac{d}{dt} \vec{M} = 0 \quad \vec{M} = \text{const}$$

закон сохранения

как момент импульсов зависит от системы координат. $\vec{h} = \text{const}$



$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{h}$$

$$\sum (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = 0$$

$$= \sum (\vec{r}_i' \times \vec{p}_i) + [\vec{h} \times \sum \vec{p}_i]$$

$$= \vec{M}' + [\vec{h} \times \vec{P}]$$

$$\vec{M} = \vec{M}'$$

1) $P=0$.

2) совм. II-го
 $\vec{h} \parallel \vec{P}'$

предмет пер. сист. движется

9.10.2015

$$v(t) = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m(t)}$$

$$dp = p(t+dt) - p(t) = \underbrace{(m+dm)(v+dv) + (-dm)(v-u)}_{p(t+dt)} - m \cdot v = 0$$

$$\frac{dv}{dm} = -\frac{u}{m} \quad \text{где } m \text{ — масса ракеты}$$

Ракета стартовала

m_k — масса топлива

1) Одноступенчатая ракета

$$m = m_n + M_T + M_0$$

полные массы

скорость ракеты после сгорания топлива

$$v = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m_0 - M_T}$$

2) 3 ступенчатая ракета

$$2.1) m_0 = m_n + m_T^{(1)} + m_c^{(1)} + m_T^{(2)} + m_c^{(2)} + m_T^{(3)} + m_c^{(3)}$$

после сж. 1 ст.

$$v_1 = 0 + u \ln \frac{m_0}{m_0 - m_T^{(1)}}$$

после сброса 1 ступени ($m_c^{(1)}$) масса

$$m_0 = m_T^{(1)} + m_c^{(1)}$$

Слр. этап

2.2)

$$V_2 = V_1 + u \ln \frac{m_0 - m_T^{(1)} - m_c^{(1)}}{m_0 - m_T^{(1)} - m_c^{(1)} - m_T^{(2)}} \quad \text{масса обрзуемого 1 ступени}$$

после сброса 2 ступени масса ракеты

$$m_0 - m_T^{(1)} - m_c^{(1)} - m_T^{(2)} - m_c^{(2)}$$

2.3) 3 ступень:

$$V_3 = V_2 - u \ln \frac{m_0 - m_T^{(1)} - m_c^{(1)} - m_T^{(2)} - m_c^{(2)}}{m_0 - m_T^{(1)} - m_c^{(1)} - m_T^{(2)} - m_c^{(2)} - m_T^{(3)}}$$

$$m_T^{(i)} = m_T$$

$$m_c^{(i)} = m_c$$

$$V_3 = u \ln \left[\frac{m_0}{m_0 - m_T} \cdot \frac{m_0 - m_T - m_c}{m_0 - 2m_T - m_c} \cdot \frac{m_0 - 2m_T - 2m_c}{m_0 - 3m_T - 2m_c} \right]$$

$$m_T = \beta m_0 \quad \left(\beta < \frac{1}{3} \right)$$

$$m_c = \alpha m_T$$

$$V_3 = u \ln \left[\frac{1}{1-\beta} \cdot \frac{1-(1+\alpha)\beta}{1-(2+\alpha)\beta} \cdot \frac{1-2(1+\alpha)\beta}{1-(3+2\alpha)\beta} \right] \quad (1)$$

$$M_T = 3m_T = 3\beta m_0$$

$$M_c = 3m_c = 3\alpha\beta m_0, \quad m_0 - \text{начальная масса ракеты.}$$

$$V_I = D + u \ln \frac{m_0}{m_0 - m_T} \quad (1)$$

$$V_I = u \ln \frac{1}{1-3\beta} \quad (2)$$

$$u = 3 \text{ км/с}$$

$$\alpha = 0,1$$

масса всего топлива: $0,9m_0$

масса всех ступеней:

0,09 т.

полная нагрузка

(боевой блок)

$m_n = 0,01 \text{ т.}$

две формулы (1) и (2) ракет

$$\beta < \frac{1}{3}$$

1) $\beta = 0,3$

2 космические скорости
8,2 км/сек

$$V_I = 6,91 \text{ км/с}$$

— двухступенчатая ракета

$$V_{III} = 10,436 \text{ км/с}$$

полная нагрузка

— 3 ступенчатая

$$m_n = 0,01 \text{ т.}$$

2) $\beta = 0,29$

$$V_I = 6,12 \text{ км/с}$$

$$V_{II} = 8,616 \text{ км/с}$$

$$m_n = 0,043 \text{ т.}$$

3) $\beta = 0,287$

$$V_I = 5,92 \text{ км/с}$$

$$V_{II} = 8,2246 \text{ км/с}$$

$$m_n = 0,0529 \text{ т.}$$

1 ступенчатая ракета
не выведет на орбиту
полностью
массу

4) $\beta = 0,285$

$$V_I = 5,793 \text{ км/с}$$

$$V_{II} = 7,99 \text{ км/с}$$

$$m_n = 0,0595 \text{ т.}$$

Качательное движение

1) Уравнение

$u(t)$

— ортормное колебаний

a и b — произв. const

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0$$

$$u(t) = a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t)$$

выбираются из нач. условий

$$\omega_0^2 \sin \omega_0 t + \omega_0^2 \sin \omega_0 t = 0$$

отброшены константы

общее решение ортормное

колебательное

$$2) \ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

нагрузка справа

ω_0 — собственная частота колебаний

ω — наложенная частота колебаний кр. эту систему.

если $\omega_0 = \omega$ — резонанс (у моста) разрушение

$$u(t) = u_{\text{осн}}(t) + \bar{u}(t)$$

частное.

$$\bar{u}(t) = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t$$

ищем в.р. в таком виде.

$$-\omega^2 A_1 \sin(\omega t) - B_1 \omega^2 \cos(\omega t) + \omega_0^2 A_1 \sin(\omega t) + \omega_0^2 B_1 \cos(\omega t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

1) при $\sin \omega t$:

$$-\omega^2 A_1 + \omega_0^2 A_1 = A$$

$$A_1 = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

2) при $\cos \omega t$:

$$-\omega^2 B_1 + \omega_0^2 B_1 = B$$

$$B_1 = \frac{B}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

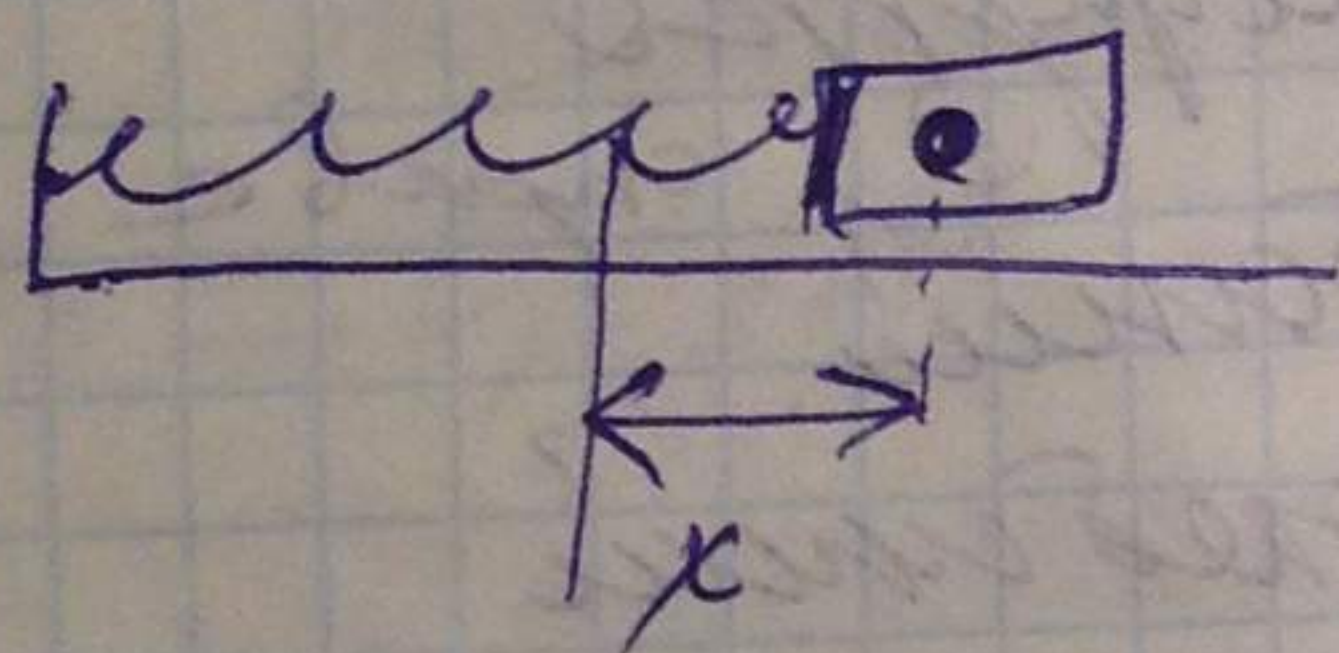
общее решение

$$u(t) = a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t) + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t + \frac{B}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

if $\omega_0 \rightarrow \omega$ - резонанс
амплитуды резко возрастают.

Задача

Колебание грузика на пружинке
на горизонт. плоскости.
Здесь нет трения



$$F = -kx$$

работа кот совершается. где разделение
пружин

↑ Потенц. энергия

$$\int_0^z kx dx = \left[\frac{kx^2}{2} \right]_0^z = \frac{kz^2}{2}$$

z - полная
вытяжка
(лен)

→ расчеты (выраб).

$$L = \frac{m(\dot{x})^2}{2} - U = \frac{m(\dot{x})^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$$

ф-л лаг.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

уравнение Лагранжа

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

эфн. колеб
урав

$$x(t) = a \sin \omega_0 t + b \cos \omega_0 t$$

a и b — const. заданы.

1) $x(0) = x_0$

$\dot{x}(0) = 0$

$t=0$

$b = x_0$

$a \omega_0 \cos \omega_0 t - b \omega_0 \sin \omega_0 t = \dot{x}(t)$

$a \omega_0 = 0$

$a = 0$

$x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$

2) $x(0) = 0$

$\dot{x}(0) = v$

$b = 0$

$a \omega_0 = v, \quad a = \frac{v}{\omega_0}$

$x(t) = \frac{v}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$

$x(t) = 1 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$

Физический маятник

$L = \frac{m (l \dot{\varphi})^2}{2}$

Лагранж / 2

Кинетическая
Эн.

потенц. энергия

$V = mgh = mg(l - l \cos \varphi) =$
 $= mgl(1 - \cos \varphi)$

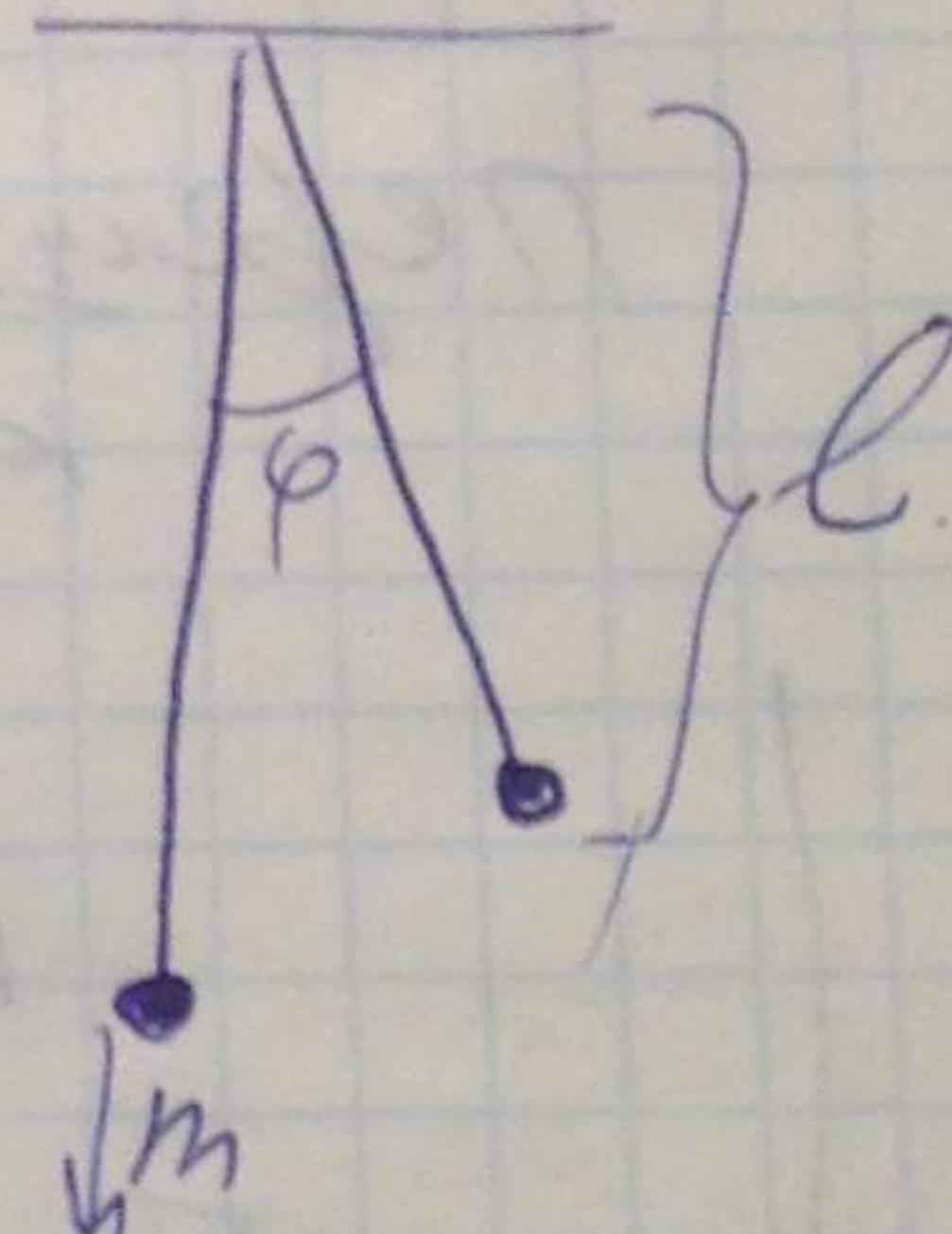
$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$

$m l \ddot{\varphi} = -m g \sin \varphi$

$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi$

Уравнение физ. маятника

$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\frac{h}{6} = \frac{1}{2}$$

ω зависит только от гравитационного

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Задача

Движение

цилиндра

по

без проскальзывания

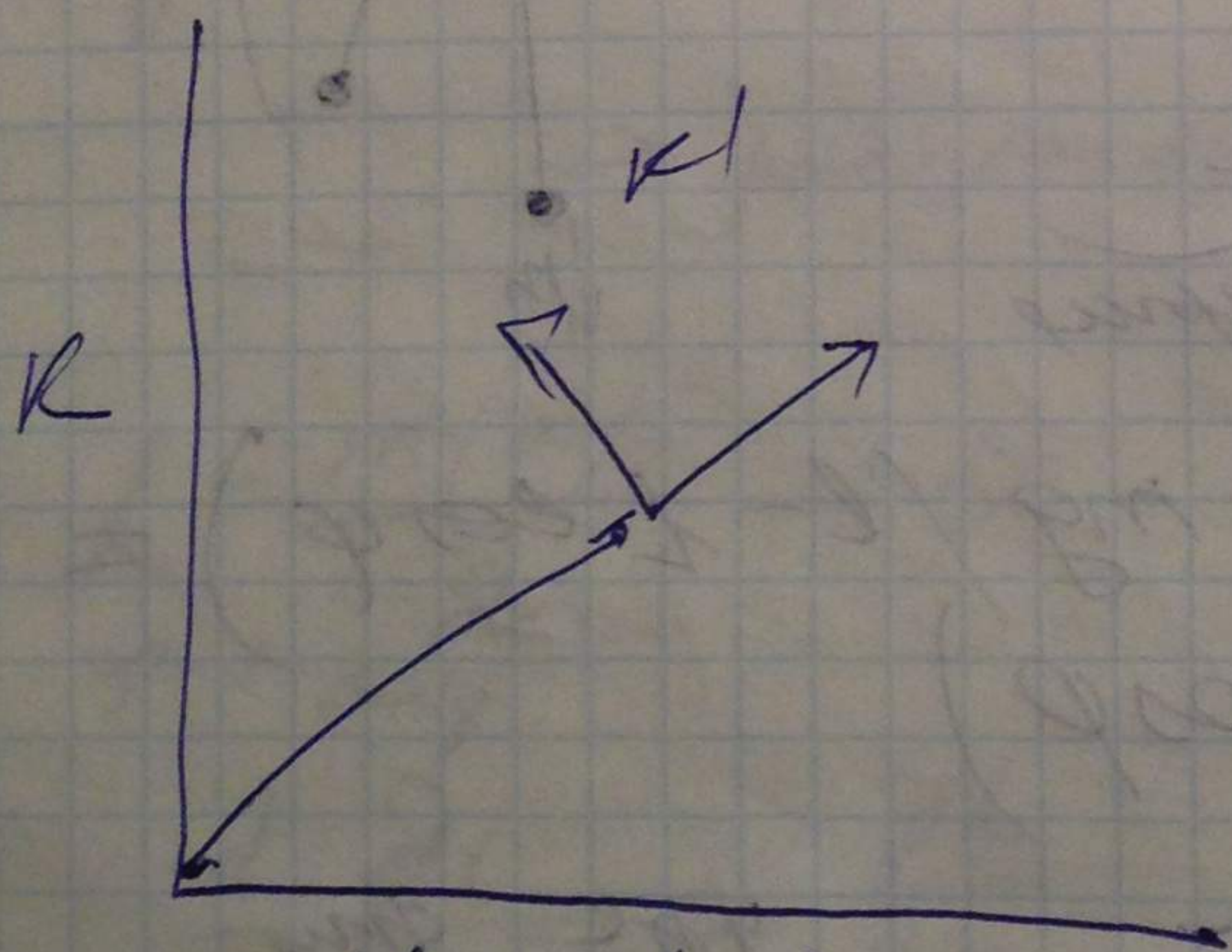
Есть система отсчета:

$$m_i \quad \vec{r}_i \quad \vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$$

$$\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = 0$$

$$E = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} - U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{r}_2 - \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_{n-1} - \vec{r}_n)$$

Полная кинетическая / внутренняя кинетическая энергия системы
переходим в иную систему координат:



$$\vec{R} = V$$

$$r_i' = r_i - R$$

$$\vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{V}$$

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{m_i (v_i')^2}{2} + U(\vec{r}_1' - \vec{r}_2', \dots, \vec{r}_{n-1}' - \vec{r}_n')$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\vec{v}_i - \vec{V}}{2}, \frac{\vec{v}_i - \vec{V}}{2} \right) + U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{r}_2 - \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_{n-1} - \vec{r}_n)$$

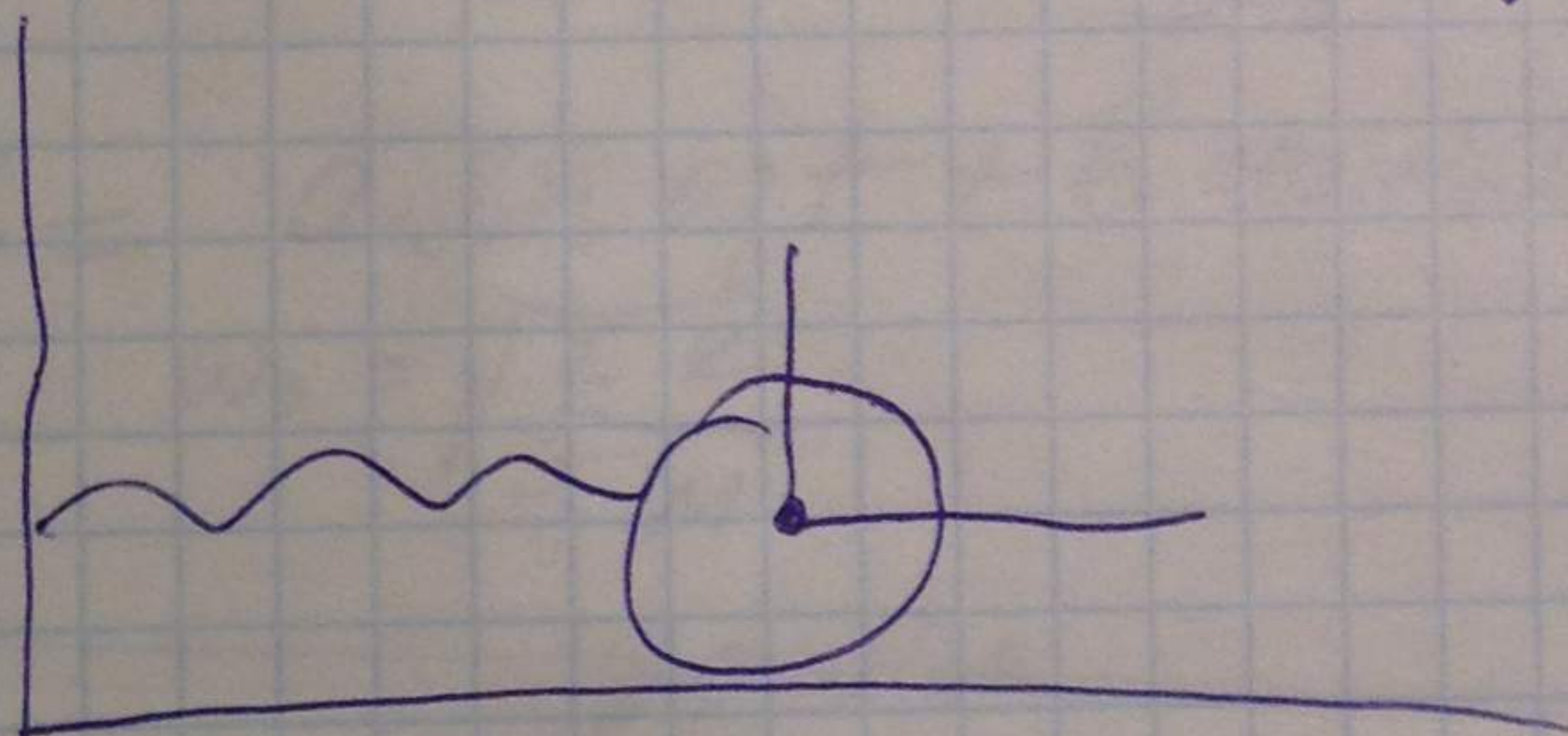
$$= \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_{i=1}^N \frac{m_i V^2}{2} - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \vec{V} + U =$$

$$= E_{\text{вн}} + \frac{M V^2}{2} - \left\langle \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i, \vec{V} \right\rangle$$

масса системы $p=0$

$$E = E_{\text{вн}} + \frac{M V^2}{2}$$

движение центра масс по пружинке
кинет. эн. центра и потенциал.



16.10.2015



for dr. $l\rho$, ρ - mass
 l - gauge
 l

$$dE_{bp} = 2\pi l \rho \omega^2 r \cdot dr \frac{(wr)^2}{2} = \pi l \rho \omega^2 r^3 dr$$

$$E_{bp} = \int_0^R \pi l \rho \omega^2 r^3 dr = \frac{\pi l \rho \omega^2 R^4}{4} = \frac{M}{4} \omega^2 R^2$$

$$E = \frac{mv^2}{2} + E_{bp} + V$$

$$\pi R^2 l \rho = M$$

$\frac{d}{dt}$

$$V = \frac{kx^2}{2}$$

$$E = \frac{MV^2}{2} + \frac{MV^2}{4} + k \frac{x^2}{2} = \frac{3}{4} M \dot{x}^2 + k \frac{x^2}{2}$$

$V = \dot{x}$

форму Лагранжа в кинет. системе координат

$$L = E_{кин} - V = \frac{3}{4} M \dot{x}^2 - k \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$\frac{3}{2} M \ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{2k}{3M}}_{\omega^2} x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$$

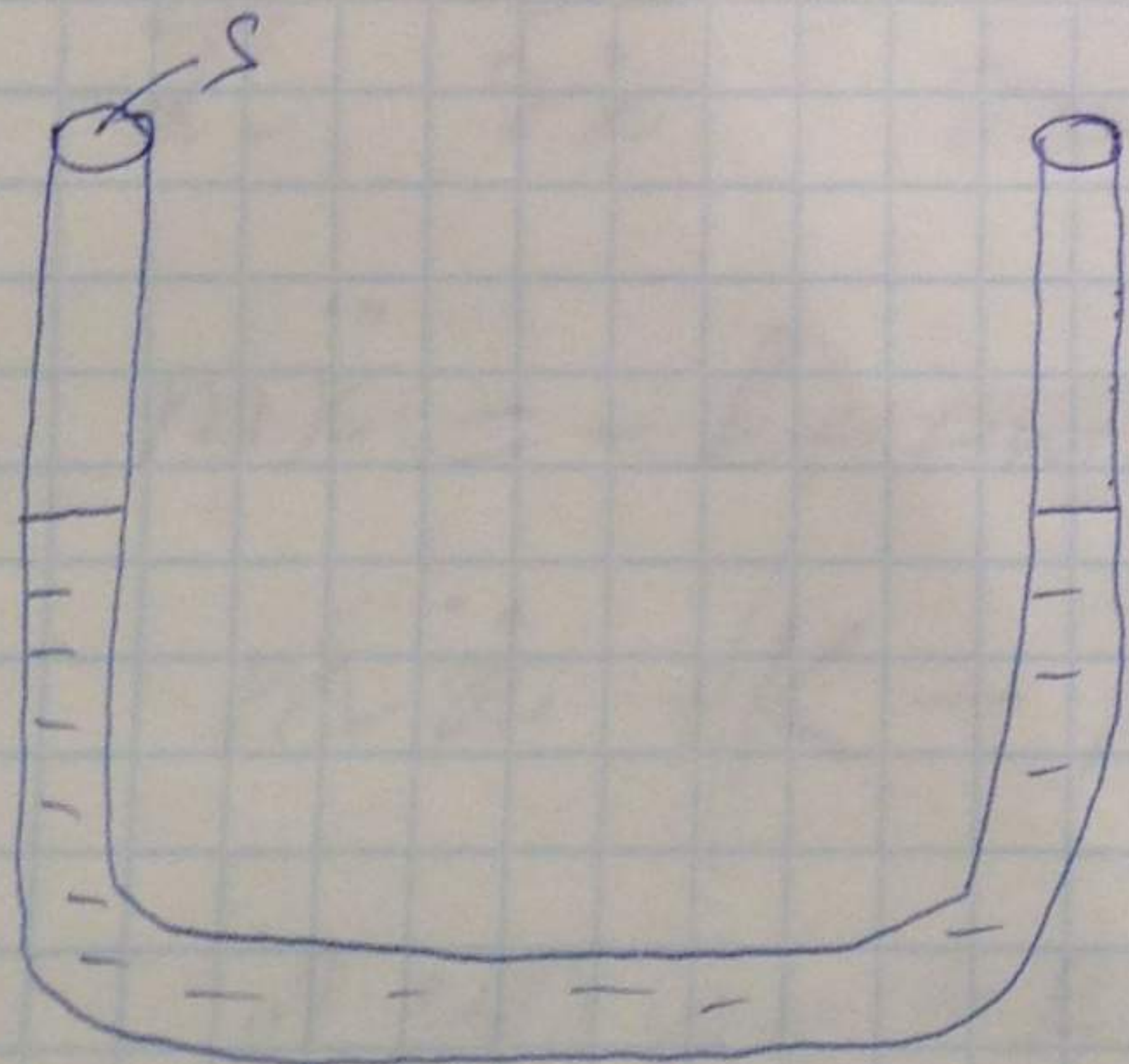
$$x = a \sin \omega_0 t + b \cos \omega_0 t$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$$

уре гармонич. колебаний

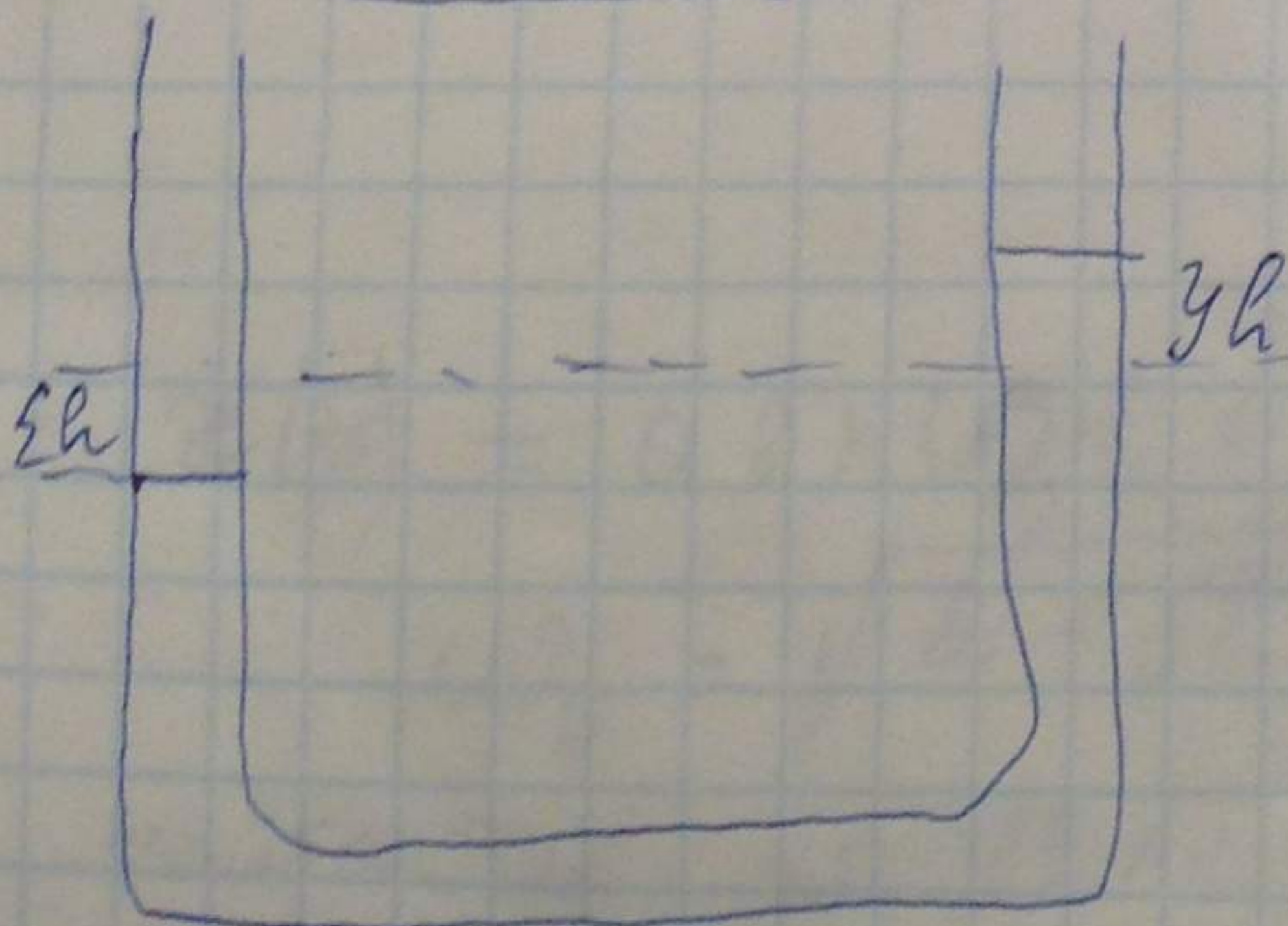
задача
найти амплитуду
качелок
без проскальзывания

Задача
Есть два сообщающихся сосуда.



S - сечение левого и
правого колена
и перемычки

r - толщина трубки



$$\frac{M \dot{h}^2}{2} = E_{кин.ея.}$$

p - давление коб ожа
поршень на трубку

$p(h) \cdot dh = dA$ — работа произвед. поперечн
 ной работы:

$$A = \int_0^x s p(h) dh = \int_0^x \frac{s \cdot dh \cdot \rho g s}{s} dh =$$

$$= \int_0^x s \rho g s dh = \rho g s \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$W = \rho g s \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$L = \frac{M \dot{x}^2}{2} - \rho g s x^2$$

x — отклонение
 от положения
 равновесия

$$\omega_0 = \frac{2 \rho g s}{M}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$M \ddot{x} = -2 \rho g s x$$

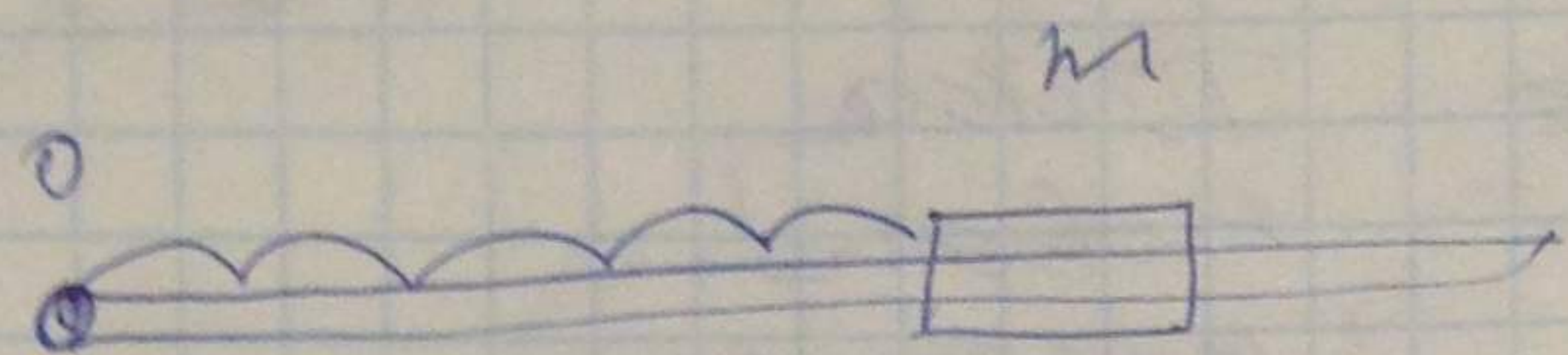
$$\ddot{x} + \frac{2 \rho g s}{M} x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2 \rho g s}{M}}$$

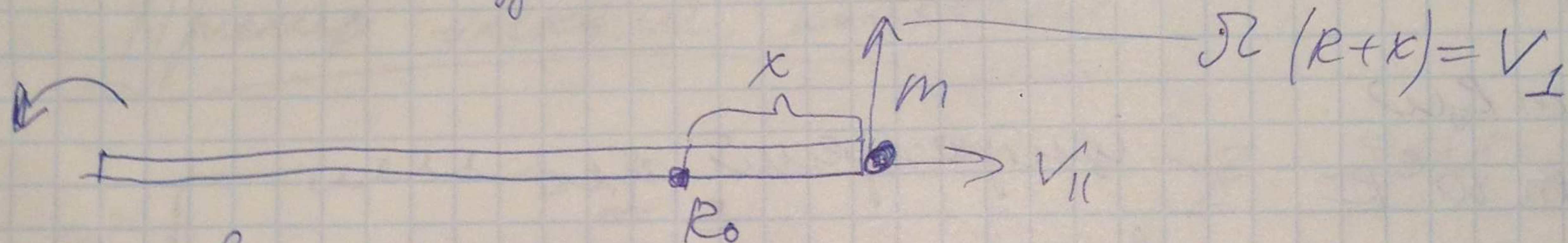
$$M = s(2l_1 + l_0) \rho$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{2l_1 + l_0}}$$

Задача



скреплен бокорь бокорь точки O. Вращать
кено - пружина с пружиной. с какой
расстоянием будет колебаться



длина. Вращать скреплен: $\ddot{x} = V_{||}$

$$v^2 = v_{\perp}^2 + v_{||}^2 = \Omega^2 (R+x)^2 + \dot{x}^2$$

$$E_{кин} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} [\Omega^2 (R+x)^2 + \dot{x}^2]$$

$$V = \frac{kx^2}{2}$$

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} \Omega^2 (R+x)^2 - \frac{kx^2}{2}$$

$$H = \frac{m \omega^2}{c^2}$$

$$K = \frac{k}{c^2}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$m\ddot{x} = -kx + m\Omega^2(R+x)$$

$$m\ddot{x} + (K - m\Omega^2)x = \underbrace{m\Omega^2 R}_{const}$$

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$\omega \rightarrow 0$$

$$x(t) = a \sin \omega_0 t + b \cos \omega_0 t + \bar{x}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k - \Omega^2 m}$$

определяет что Omega не слишком велико: $\Omega^2 m < k$

$$\begin{aligned} [Kx] &= H \\ [K] &= \frac{H}{x} \\ [m\Omega] &= m \cdot \frac{1}{c^2} \end{aligned}$$

$$(K - m\Omega^2) \bar{x} = m\Omega^2 R_0$$

$$\bar{x} = \frac{m\Omega^2 R_0}{K - m\Omega^2}$$

точка
нового
положения
равновесия

ц. ст. сила действует
прямую

$$F_{\text{ц. ст.}} = m R_0 \omega^2 - \text{центростремительная}$$

$$m\Omega^2(R_0 + \bar{x}) = K\bar{x}$$

$$\bar{x} \cdot (K - m\Omega^2) = m\Omega^2 R_0$$

$$\ddot{u} + \mu u = 0$$

$$e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\lambda e^{\lambda t} + \mu e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + \mu = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - \mu}$$

$$\text{Если } 4 - \mu < 0$$

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm i \sqrt{|\mu - 4|}$$

ω_0

$$e^{-rt + i\omega_0 t}$$

$$e^{-rt - i\omega_0 t}$$

$$e^{-rt}$$

— 1 решение

— 2 решение

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$R = R_0 + \bar{x}$$

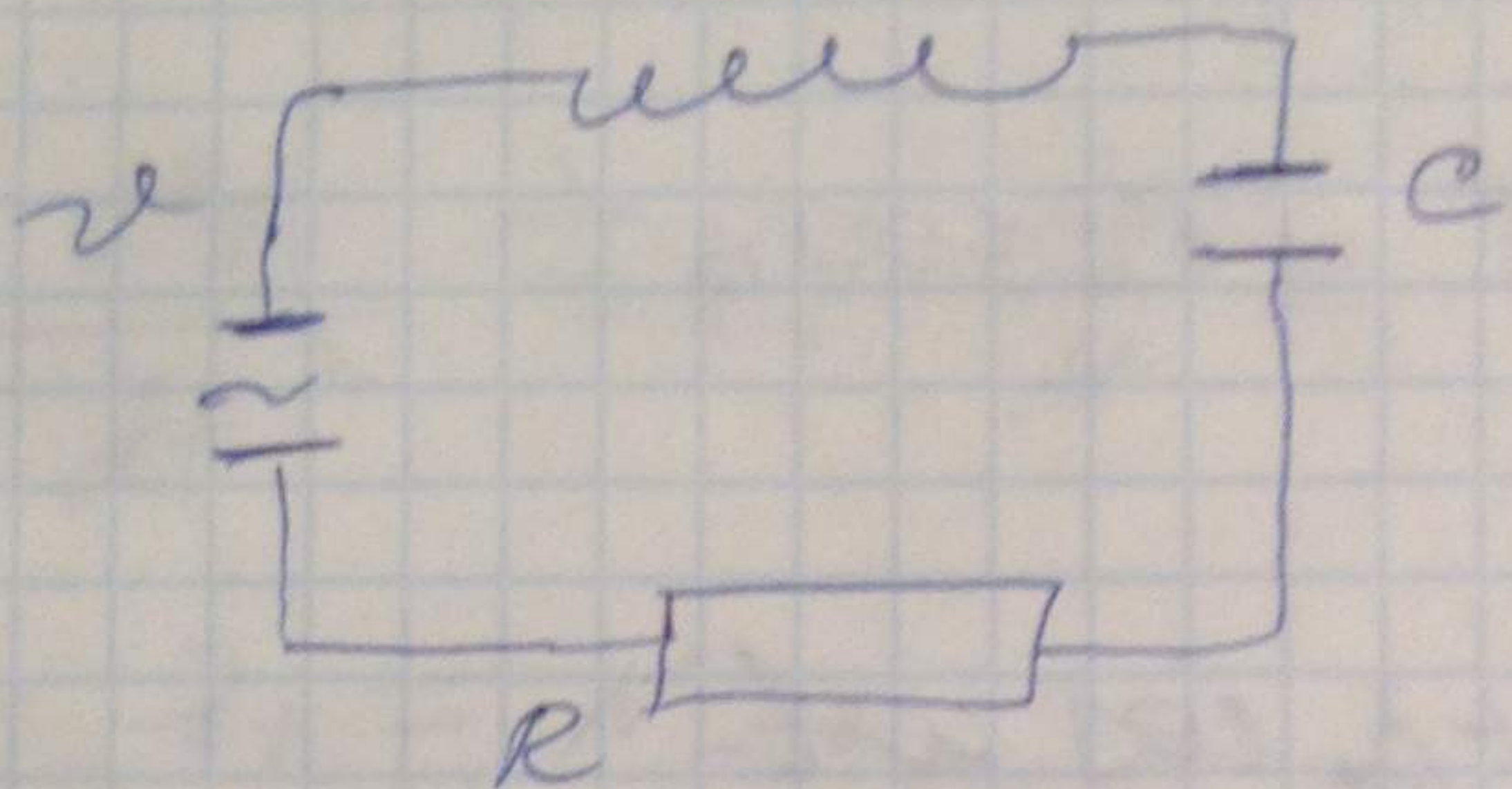
$$\omega = \Omega$$

$$\lambda = \pm \lambda_1 > 0$$

$$e^{\lambda_1 t} \quad e^{-\lambda_1 t}$$

если λ будет отрицательным велико

Пример электрич. колебаний?



q - заряд?

$\dot{q}$ - ток

Изменение заряда в пластинках конденсатора

по Кирхгофа:

сумма падений напряжений $= 0$

$$L \ddot{q} + \frac{q}{C} + \dot{q} R + U = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = F(t)$$

уре
колебаний?

$$\ddot{u} + 2\gamma \dot{u} + \mu u = F(t)$$

$e^{\lambda t}$ - реш.

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma \lambda e^{\lambda t} + \mu e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \mu}$$

1) $\gamma > 0$ — сопротивление.

$$\mu > 0, \quad \mu = \frac{1}{LC}$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \mu} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$c_1 e^{-\gamma t + i\sqrt{\mu} t}$$

$$c_2 e^{-\gamma t - i\sqrt{\mu} t}$$

$$u(t) = c_1 e^{-\gamma t} e^{i\sqrt{\mu} t}$$

$$+ c_2 e^{-\gamma t} e^{-i\sqrt{\mu} t} = e^{-\gamma t} (a_1 \sin \omega_0 t +$$

$$+ b_1 \cos \omega_0 t + i a_2 \sin \omega_0 t + b_2 \cos \omega_0 t)$$

без фазового сдвига

$$\ddot{u} + 2\gamma \dot{u} + \omega_0^2 u = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

$$\bar{u}(t) = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t$$

$$A_1 = \frac{A(\omega_0^2 - \omega^2) + B \frac{\gamma}{2} \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2}{4} \omega^2}$$

$$B_1 = \frac{B(\omega_0^2 - \omega^2) - A \frac{\gamma}{2} \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2}{4} \omega^2}$$

48:16

$$\frac{R}{L} = 2\gamma$$

нормальная особенность

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Задача про равновесное состояние
согнупников в фирме.

N_0, P_0 — значения

конца согнупника

$$\frac{dP}{dt} = -d_1(N - N_0)$$

$P(t), N(t)$ — ?

Как будут меняться
сумма баллов и
равновесное
состояние

$$\frac{dN}{dt} = d_2(P - P_0)$$

$$\frac{d^2N}{dt^2} = d_2 \cdot \frac{dP}{dt} = -d_1 d_2 (N - N_0)$$

$$z_1 = N - N_0$$

$$\ddot{z}_1 = -d_1 d_2 z_1$$

$$\dot{z}_1 + d_1 d_2 z_1 = 0$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = -d_1 \frac{dN}{dt} = -d_1 d_2 (P - P_0)$$

$$z_2 = P - P_0$$

$$\omega_0 = \sqrt{d_1 d_2}$$

$$\ddot{z}_2 + d_1 d_2 z_2 = 0$$

колебания не затухают

$$d_1 z_1^2 + d_2 z_2^2 = \text{const}$$

— первый интеграл
системы уравнений

$$d_1 z_1 \dot{z}_1 + 2 d_2 z_2 \dot{z}_2 =$$

$$\dot{z}_1 = \dot{N} = d_2 (P - P_0)$$

$$\dot{z}_2 = \dot{P} = -d_1 (N - N_0)$$

$$d_1 z_1^2 + d_2 z_2^2 > 0.$$

$$d_1 z_1 \dot{z}_1 + 2d_2 z_2 \dot{z}_2 = 0,$$

консервирован не является.

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -k(x) x \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v(0) = v_0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (2)$$

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{k(x)}{m} x \quad (3)$$

$$(2) : (3)$$

$$\frac{dx}{dv} = - \frac{v \cdot m}{k(x) \cdot x}$$

$$k(x) x dx = -m v dv$$

$$\begin{aligned} -\int m v dv &= \int k(x) x dx \\ -\frac{m v^2}{2} &= \end{aligned}$$

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{v^2}{2} = \int_{x_0}^x \frac{k(\xi)}{m} \xi d\xi$$

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 - 2 \int_{x_0}^x \frac{k(\xi)}{m} \xi d\xi} \quad (4)$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{v_0^2 - 2 \int_{x_0}^x \frac{k(\xi)}{m} \xi d\xi}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - 2 \int_{x_0}^x \frac{k(\xi)}{m} \xi d\xi}} = dt$$

$$t = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - 2 \int_{x_0}^x \frac{k(\xi)}{m} \xi d\xi}} \quad (5)$$

$$f(x(t)) = t$$

или

$$x(t) = f^{(-1)}(t)$$

if $K(x) = k \rightarrow$

в прерог. резини
(эластичност. упр.)

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\int_{x_0}^x \frac{k(\xi) d\xi}{m} = \frac{k\xi^2}{2m} \Big|_{x_0}^x = \frac{kx^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2}$$

$$t = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \frac{k(x^2 - x_0^2)}{m}}} = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \frac{kx^2}{m} + \frac{kx_0^2}{m}}}$$

$$\left\{ \sqrt{v_0^2 + \frac{kx_0^2}{m}} = L \right\}$$

$$= \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{k}{md^2} \cdot x^2}} = \left\{ y = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{x}{L} \right\}$$

$$= \int_{x_0}^{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} x_0}$$

$$x(t) = A \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}} t}_{\omega_0} + \varphi\right) \quad \text{сгбур по фазе}$$

при $t=0$

$$x(0) = A \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \varphi = A \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 2 \cos$$

Задача о динамике популяции
(рыб в охотском море)

N — количество особей в этой популяции

$\frac{dN}{dt} = \alpha(N)$ — коэф. рождаемости

$\beta(N)$ — коэф. смертности

$$\frac{dN}{dt} = \alpha(N) - \beta(N)$$

$$\alpha(N) = \alpha_0 \cdot N$$

$$\beta(N) = \beta_0$$

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_0 N^2 - \beta_0 N$$

$$\int \frac{dN}{\alpha_0 N^2 - \beta_0 N} = \int dt$$

$$\frac{1}{\beta_0} \int \left(-\frac{1}{N} + \frac{\alpha_0}{\alpha_0 N - \beta_0} \right) dN = t - C$$

$$\frac{1}{\beta_0} \left(-\ln N + \ln |d_0 N - \beta_0| \right) = t - C \quad N = N(t)$$

$$\ln \frac{|d_0 N(t) + \beta_0|}{N(t)} = \beta_0 t - C_1, \quad A = e^{-\beta_0 C}$$

$$\left| d_0 - \frac{\beta_0}{N} \right| = A e^{\beta_0 t}$$

$$\boxed{1) \quad N(0) = N_0 < \frac{\beta_0}{d_0}}$$

$$\frac{dN}{dt} = d_0 N^2 - \beta_0 N = d_0 N \left(N - \frac{\beta_0}{d_0} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{dt} < 0$$

$$N(t) < N(0) < \frac{\beta_0}{d_0}$$

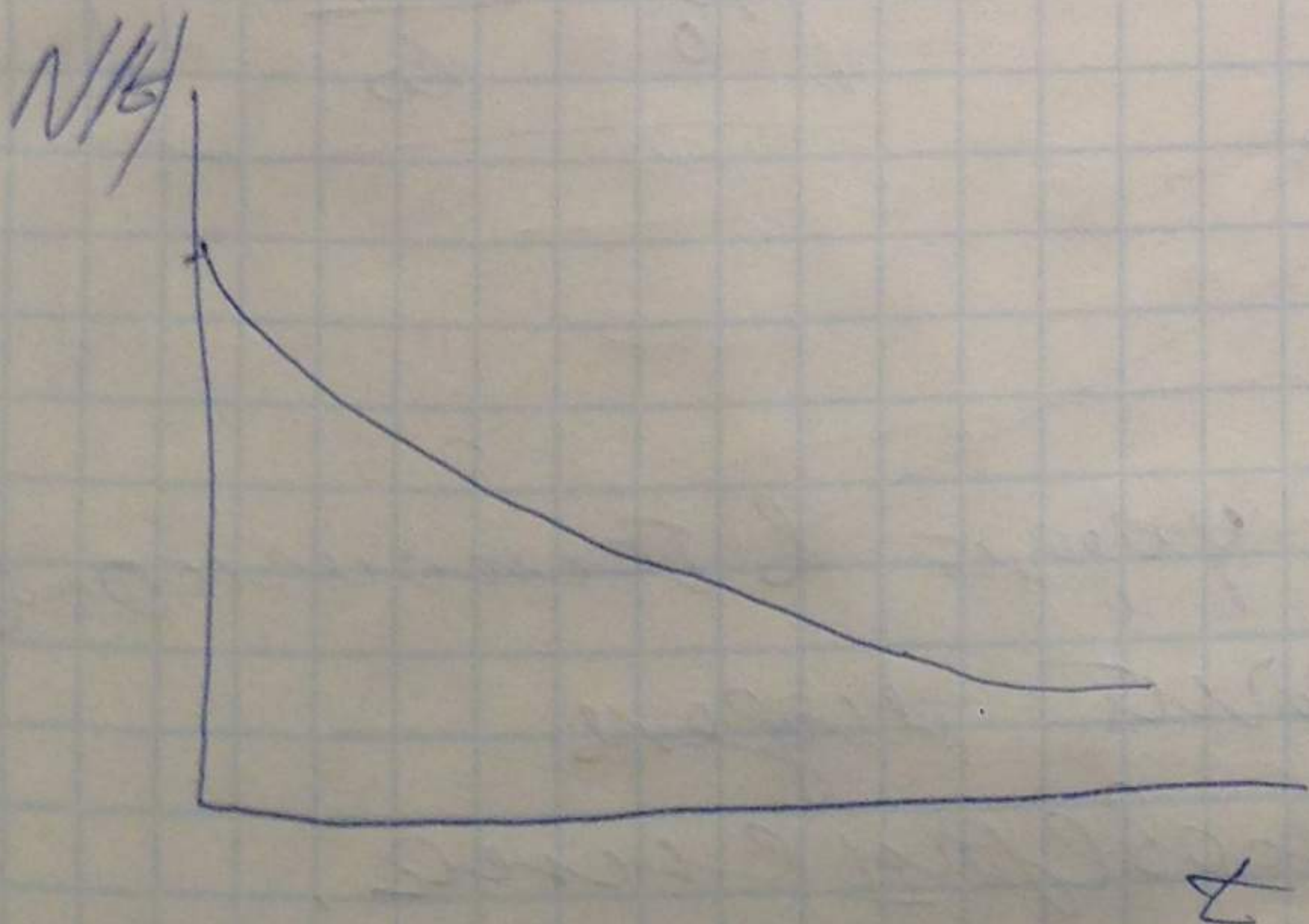
$$N(t) - N(0) < \frac{\beta_0}{d_0}$$

$$d_0 - \frac{\beta_0}{N} < 0$$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\beta_0}{N} - d_0 = A e^{\beta_0 t} = \left(\frac{\beta_0}{N_0} - d_0 \right) e^{\beta_0 t}$$

$$N(t) = \frac{\beta_0}{d_0 + \left(\frac{\beta_0}{N_0} - d_0 \right) e^{\beta_0 t}}$$



if, когда скорость $<$
некоей ~~кон~~ критич.
значения β_0
популяция 'вымирает'.

$$2) N(0) = N_0 - \frac{\beta_0}{\alpha_0} > 0$$

$$\frac{dN}{dt} > 0 \quad |_{t=0} \quad \frac{dN}{dt} > 0$$

$$N(t) - N(0) < \frac{\beta_0}{\alpha_0}$$

$$\alpha_0 - \frac{\beta_0}{N} < 0$$

$$\alpha_0 - \frac{\beta_0}{N(t)} = A e^{\beta_0 t} = \left(\alpha_0 - \frac{\beta_0}{N_0} \right) e^{\beta_0 t}$$

$$N(t) = \frac{\beta_0}{\alpha_0 - \left(\alpha_0 - \frac{\beta_0}{N_0} \right) e^{\beta_0 t}}$$

38:33.

наименьшее время паразитирует

$$t^* = \ln \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - \frac{\beta_0}{N_0}}$$

$$N(t) \rightarrow \infty$$

$$t \rightarrow t^*$$

чем ↑

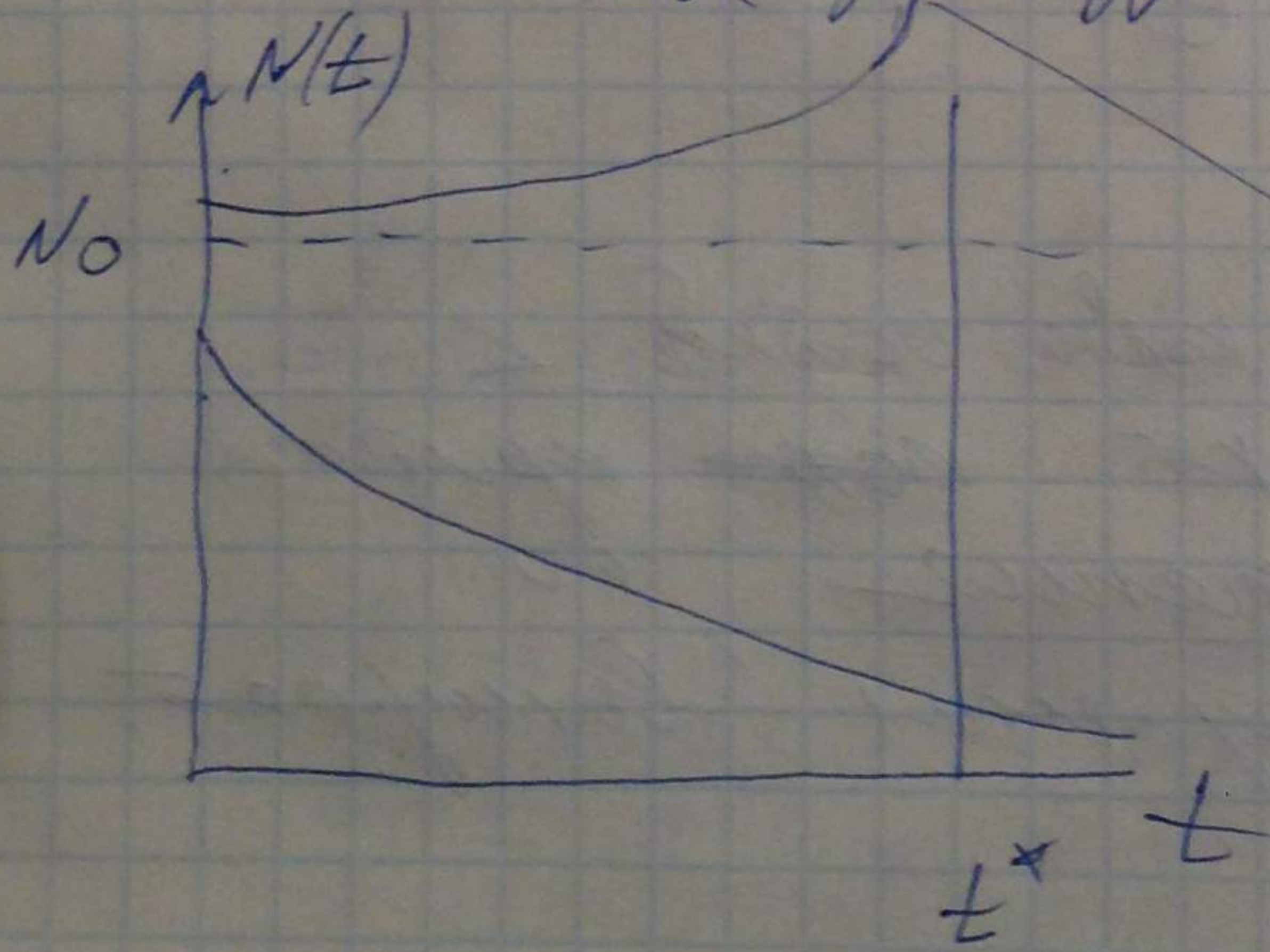
N

if $N < N_0$ то — гибель
 $N > N_0$ —

$t^* \downarrow$

$$N_0 = \frac{\beta_0}{\alpha_0}$$

Кривая паразитирует



уходит в бесконечность
масса может
несовместима.

Модель хищник-жертва

$x(t)$ — жертва

$y(t)$ — хищник

$$V(x) = \beta x$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - V(x) y & (1) \end{cases}$$

α, k, m — const
модель

Лотке — Вольтерра

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y(kV(x) - m) & (2) \end{cases}$$

α — коэф. рождаемости,

т.е. α — тем. прироста жертв в отсутствие хищников

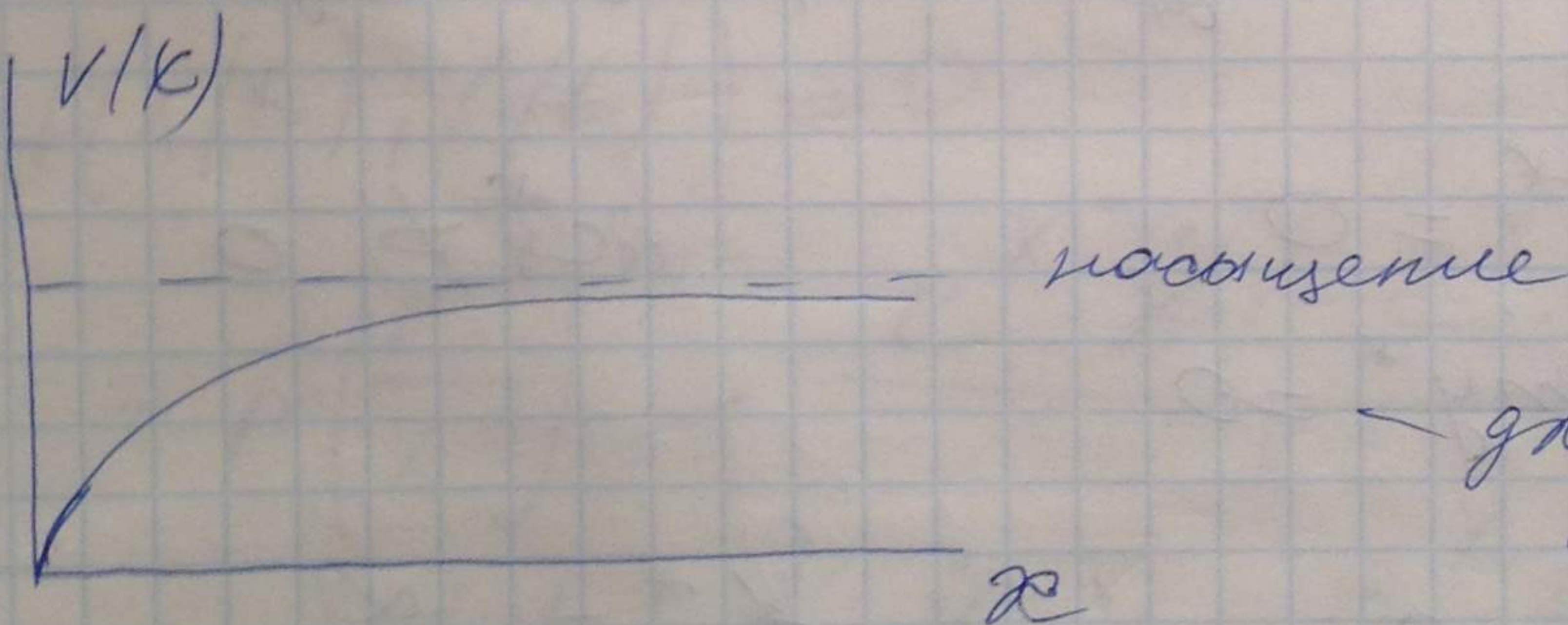
$V(x)$ — коэф. смертности жертв

1-м хищником в единицу времени,

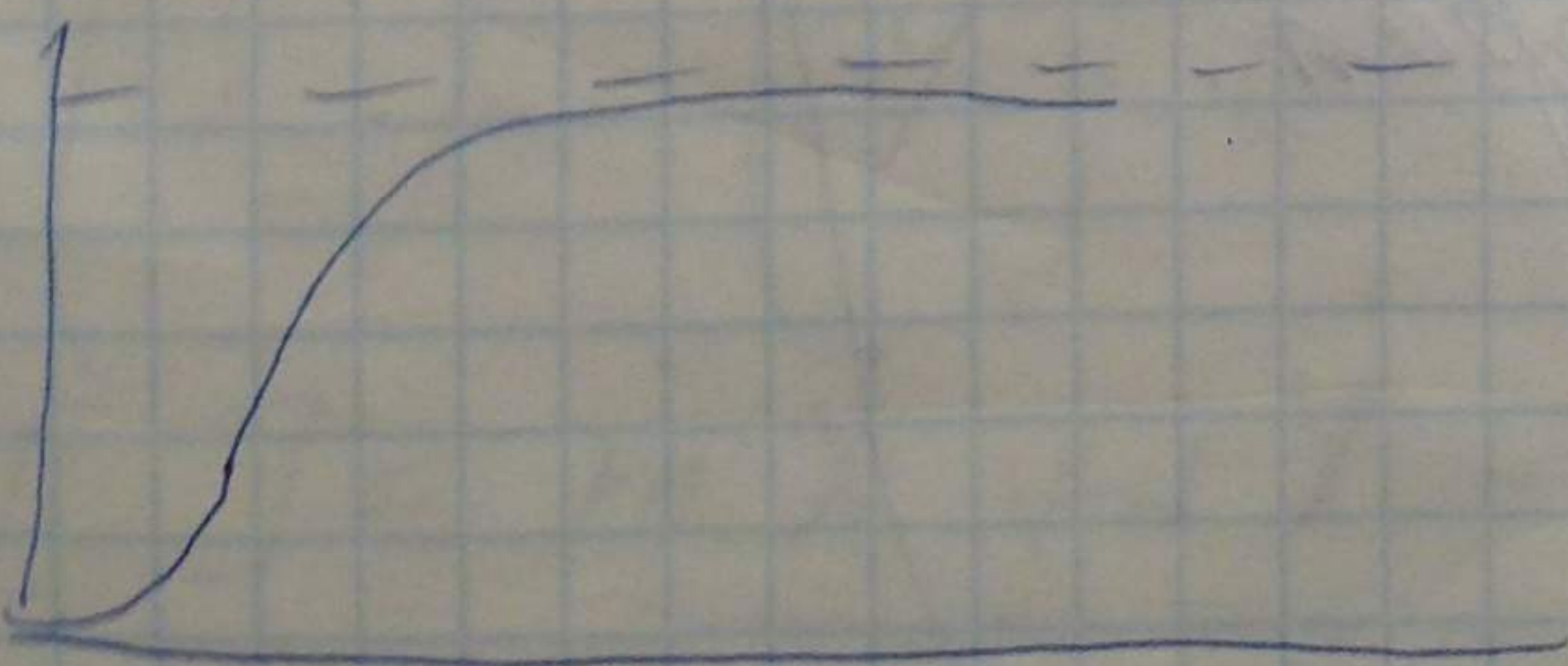
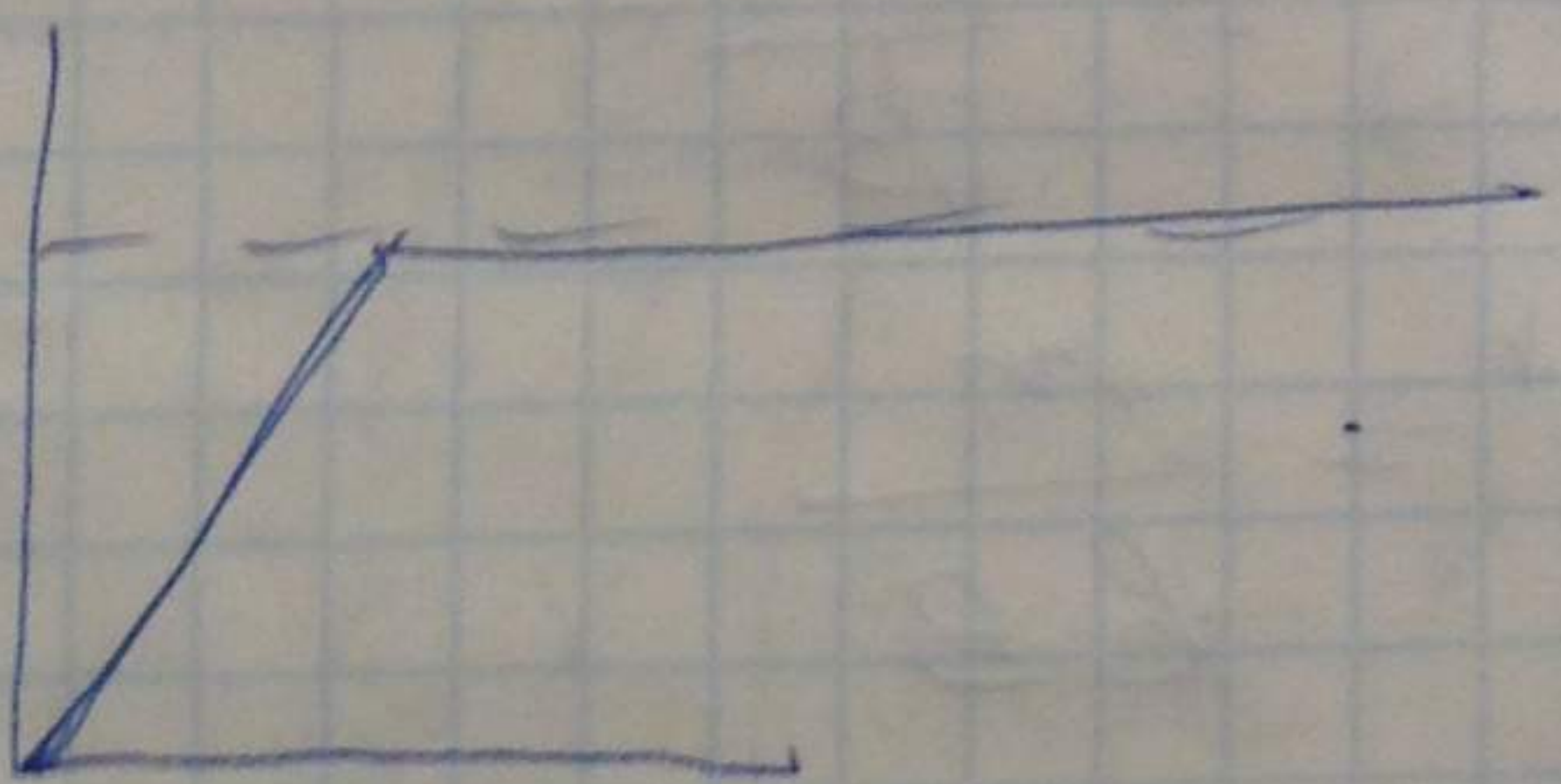
(m — коэф. смертности хищников)

$$\frac{dy}{dt} = y(kV(x) - m)$$

$V(x)$ — функциональная ф-ция,



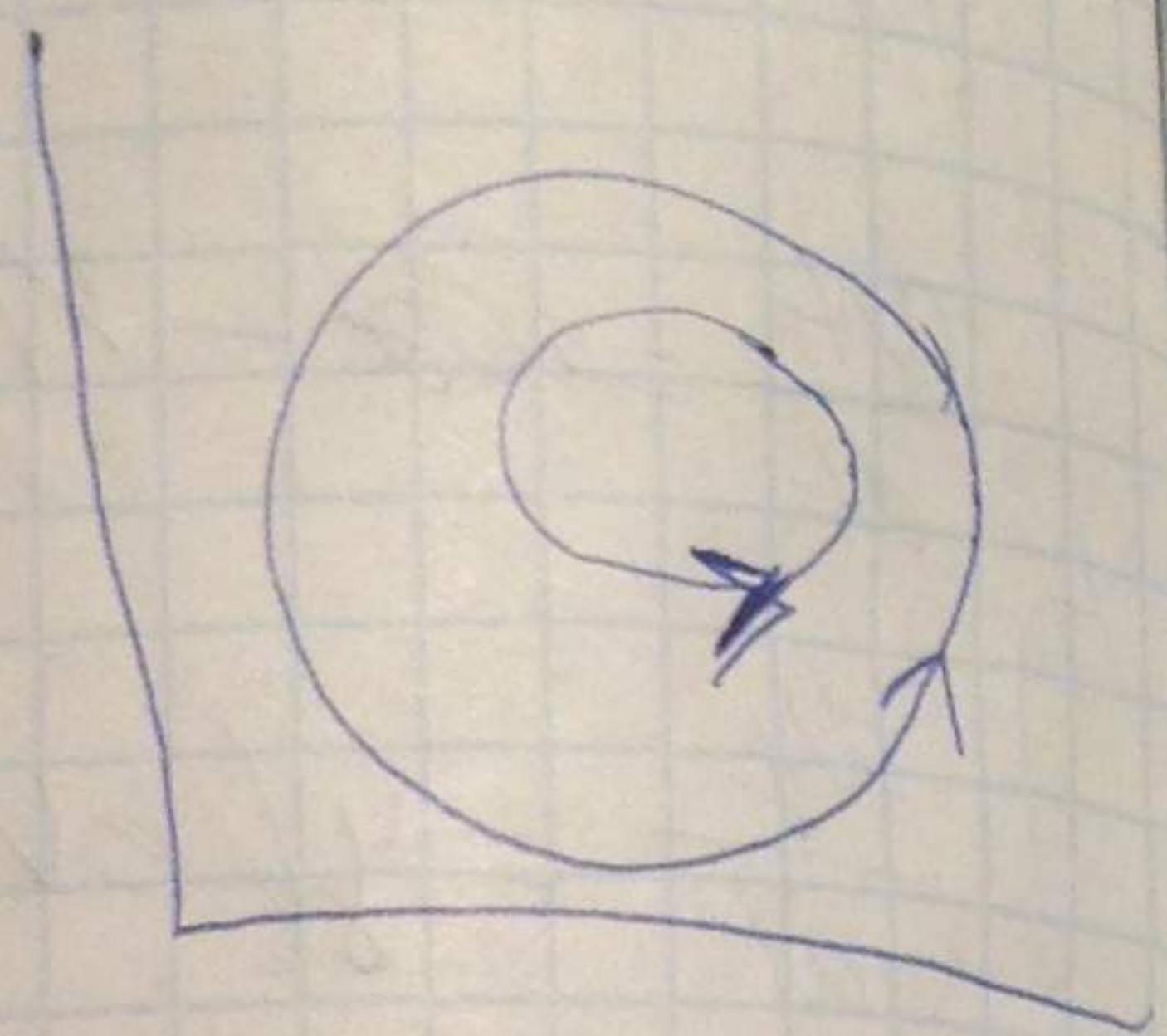
— для беспузырей
и нек. типов
хищников



$V(x) = \beta x$
 $L, k, m - \text{const}$
 force - conservative

$$\frac{dx}{dt} = Lx - \beta xy$$

$$\frac{dy}{dt} = k\beta x \cdot y - my \quad (1')$$



1) can be mixed - min берется
 2) first part
 3) mixed
 4) first
 5)

9:50

Стационарные точки

$$\frac{dx}{dt} = Lx - \beta xy = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = k\beta xy - my = 0$$

$$\begin{cases} Lx^* - \beta x^* y^* = 0 \\ k\beta x^* y^* - my^* = 0 \end{cases}$$

$$x^* \neq 0$$

$$x^* (L - \beta y^*) = 0$$

$$y^* = \frac{L}{\beta}$$

$$y^* (k\beta x^* - m) = 0$$

$$x^* = \frac{m}{k\beta}$$

Важно! есть 1-й интеграл.

$$f(x(t), y(t)) = \text{const}$$

$$X = \frac{x}{x^*}, \quad Y = \frac{y}{y^*}$$

$$\left(\frac{e^X}{X} \right)^m \cdot \left(\frac{e^Y}{Y} \right)^\alpha = C = \text{const.}$$

$$x(0) = x_0$$

$$y(0) = y_0$$

$$C = \left(\frac{e^{\frac{x_0}{x^*}}}{\frac{x_0}{x^*}} \right)^m \cdot \left(\frac{e^{\frac{y_0}{y^*}}}{\frac{y_0}{y^*}} \right)^\alpha$$

$$C = e^{m+d}$$

16:14

Покажем, что C — первый интеграл.

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = 0.$$

$$\frac{d}{dt} F = m \left(\frac{e^X}{X} \right)^{m-1} \cdot \frac{e^X \cdot \dot{X} \cdot X - e^X \cdot \dot{X}}{X^2} -$$

$$- \alpha \left(\frac{e^Y}{Y} \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{e^Y \cdot \dot{Y} \cdot Y - e^Y \cdot \dot{Y}}{Y^2} =$$

$$= \left(\frac{e^X}{X} \right)^m \cdot \left(\frac{e^Y}{Y} \right)^\alpha \cdot \left[m \cdot \dot{X} \left(1 - \frac{1}{X} \right) + \alpha \cdot \dot{Y} \left(1 - \frac{1}{Y} \right) \right]$$

$$[] = \underbrace{m \dot{X}}_{(1)} + \underbrace{\alpha \dot{Y}}_{(2)} - \left(m \cdot \frac{\dot{X}}{X} + \alpha \cdot \frac{\dot{Y}}{Y} \right)$$

$$1) m \cdot \ddot{x} + d \dot{y} = m \frac{\ddot{x}}{x^*} + d \frac{\dot{y}}{y^*} =$$

- неграбное
математика

$$= k\beta(\alpha x - \beta y) + \beta(k\beta xy - my) =$$

$$= \alpha k\beta x - m\beta y$$

25.10.7

$$2) m \frac{\ddot{x}}{x} + d \frac{\dot{y}}{y} = m \frac{\ddot{x}}{x} + d \frac{\dot{y}}{y} = \cancel{\alpha k\beta x} - \cancel{k\beta y}$$

~~$\alpha k\beta x - m\beta y$~~

$$= \frac{\alpha k\beta xy - my}{y} + d m - \beta k y = \alpha k\beta x - m\beta y$$

$$(1) = (2)$$

$$\alpha k\beta x - m\beta y = \alpha k\beta x -$$

Морем

Комморова -

Перовский

в 39 году

Пискунов

объяснение

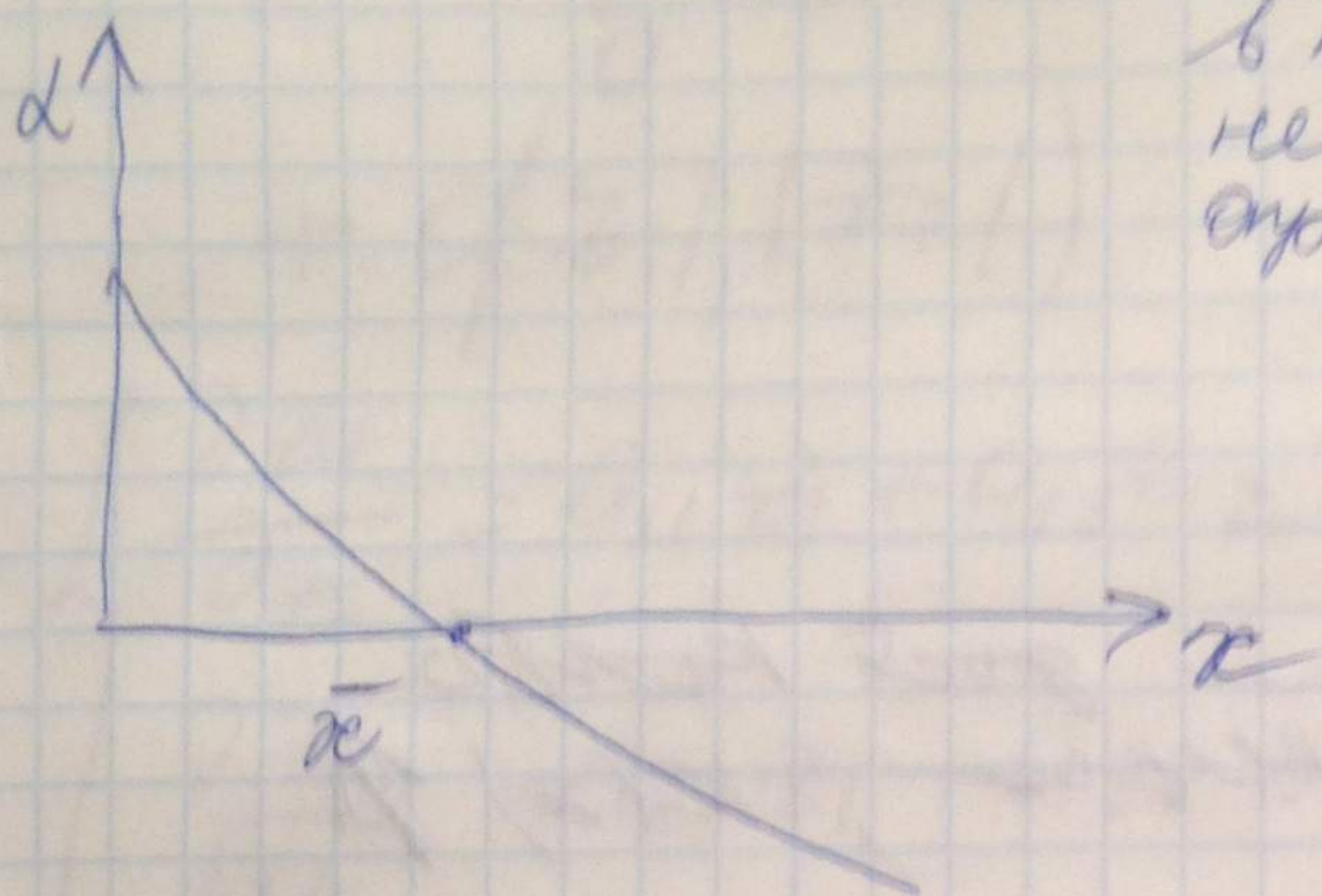
Волжской Морем.

Морем

Комморова

равно
милл

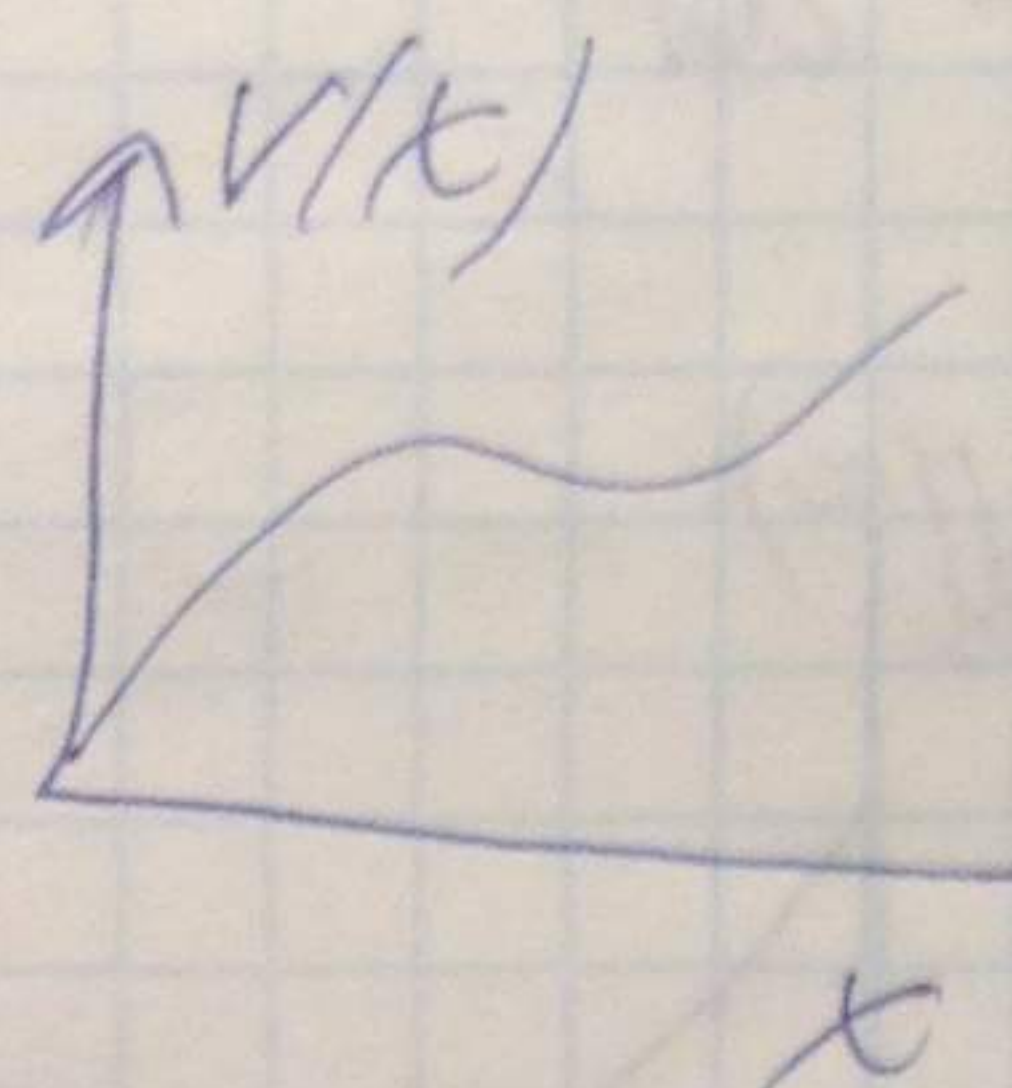
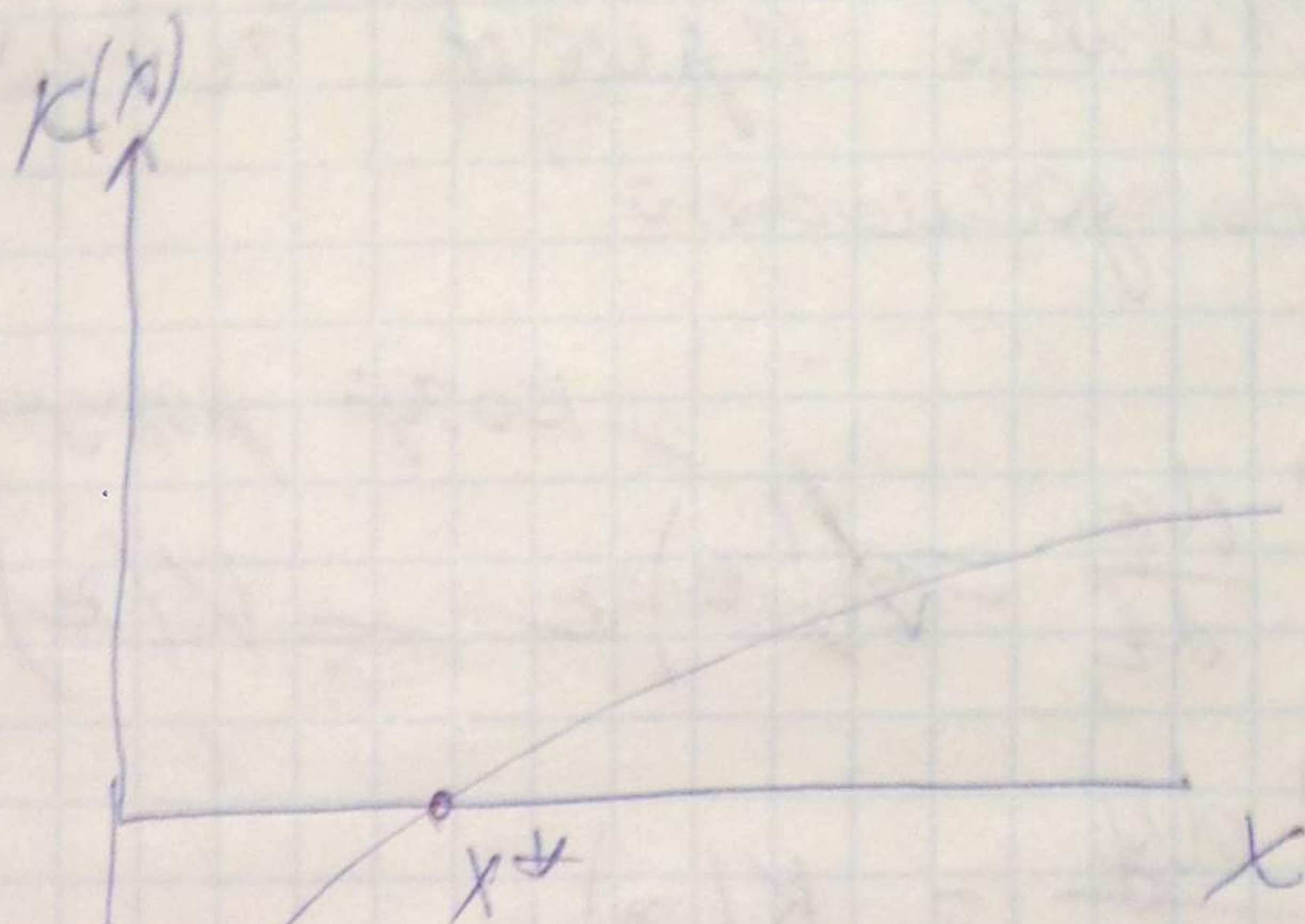
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = d(x) \cdot x - V(x)/y \\ \frac{dy}{dt} = k(x) \cdot y \end{cases} \quad (3)$$



в нуле
не
определена

функция V — неотрицательная.

next section.



пу.

м.

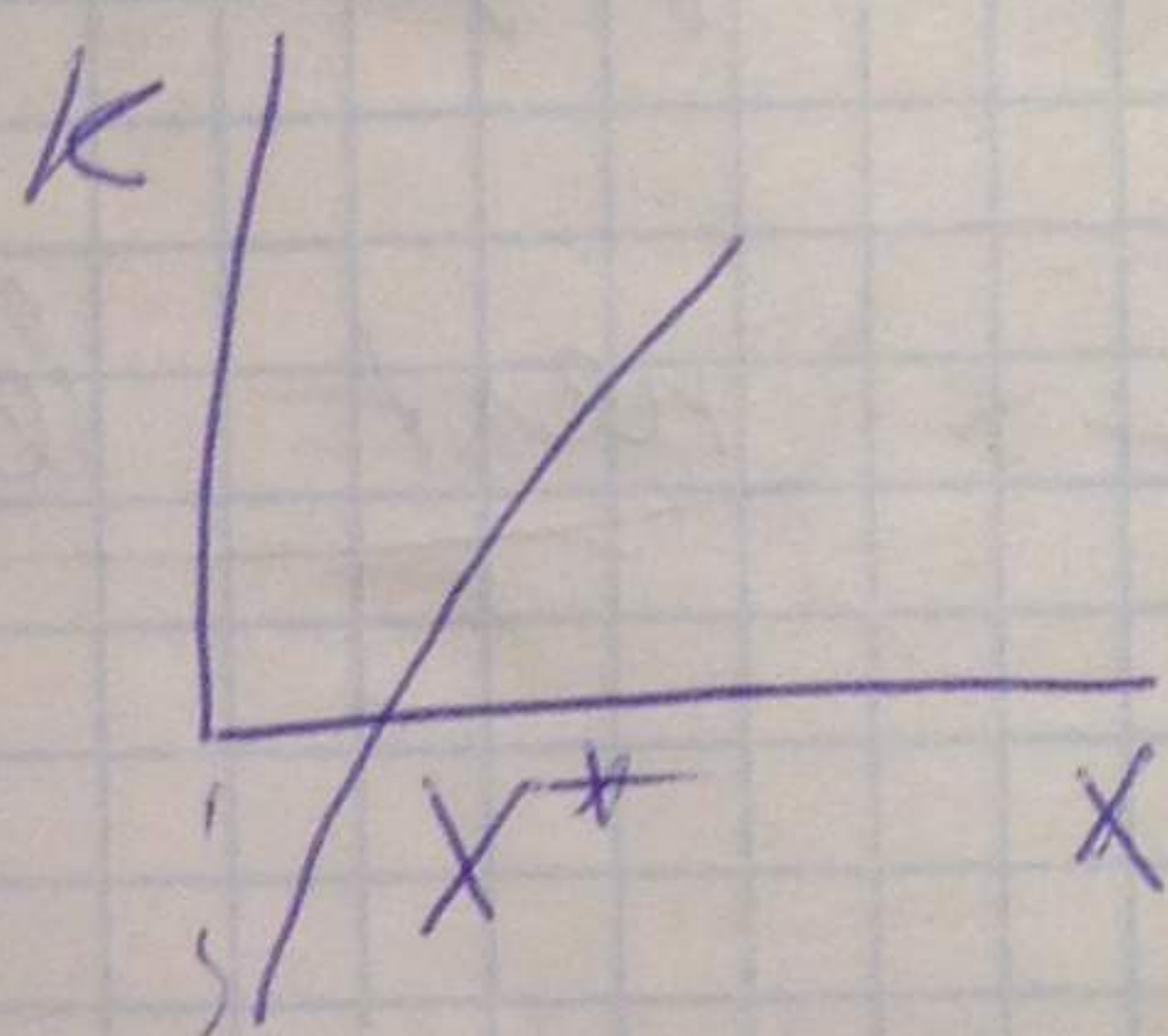
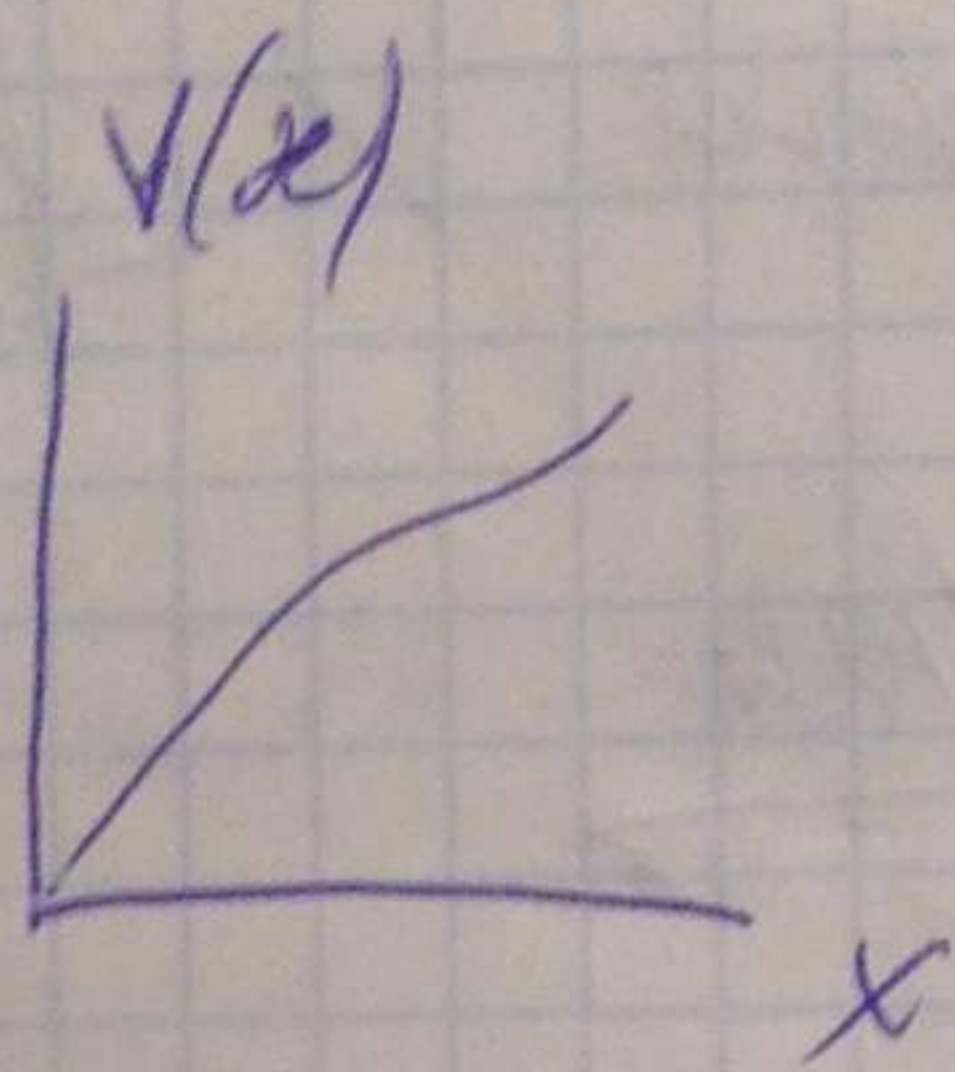
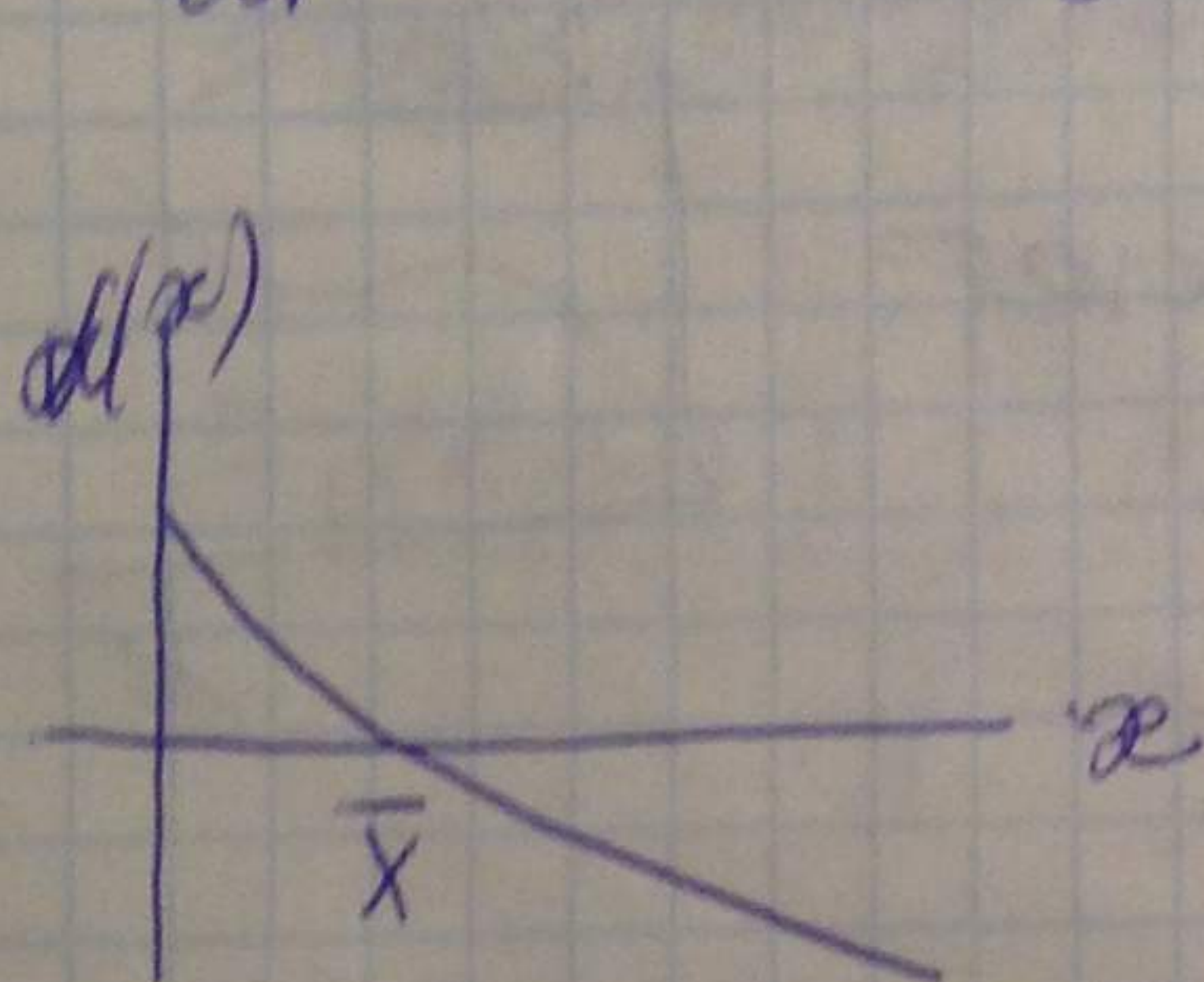
30.10.2015

$x(t)$ - скорость
 $y(t)$ - количество хищников
 скорость прироста и смертность
 жертв охоты

который рождается.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = d(x)x - V(x)y \\ \frac{dy}{dt} = K(x)y \end{cases}$$

Если есть конбо
 масса, $K(x) \uparrow$



Исследов. нелинейных ур-ий.

стационар. точки.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases} \rightarrow (x^*, y^*)$$

как находить стан. точки
 расше. линейной системы

возмущение

$$\begin{cases} x = x^* + z_1 \\ y = y^* + z_2 \end{cases}$$

близ Рейнольдса

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= F(x^* + z_1, y^* + z_2) = F(x^*, y^*) + \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, y^*) z_1 + \frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*) z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} &= G(x^* + z_1, y^* + z_2) = G(x^*, y^*) + \frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*) z_1 + \frac{\partial G}{\partial y}(x^*, y^*) z_2 \end{aligned}$$

(10:17)

$$1) \textcircled{1} + \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial y^*} z_2 + Q(|z_1|, |z_2|)$$

$$2) \textcircled{2} G(x^*, y^*) + \frac{\partial G(x^*, y^*)}{\partial x} z_1 + \frac{\partial G(x^*, y^*)}{\partial y} z_2 + Q(|z_1|, |z_2|)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial t} = a_{11} z_1 + a_{12} z_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z_2}{\partial t} = a_{21} z_1 + a_{22} z_2 \end{cases}$$

 $a_{ij} = \text{const}$

$$\frac{dz}{dt} = Az, \quad z(t) = h_1 e^{\lambda_1 t} + h_2 e^{\lambda_2 t}$$

h_1, h_2 - собств. векторы матрицы A , обрат
собств. значениям

λ_1, λ_2 - собств. числа матрицы A

$$Ah = \lambda h$$

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 h_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$Az = \lambda_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 h_2 e^{\lambda_2 t}$$

можно выбрать соб. вект. функции
группы и получить записав

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - E)h = 0$$

сист. алгеб. ур.
одног. и имеет
неблиз. решение
когда матрица
вырождена

(14:30)

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = A - \lambda E$$

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21} \cdot a_{12} = 0.$$

$$a_{11}a_{22} - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + \lambda^2 - a_{12} \cdot a_{21} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}_{\substack{\text{определитель} \\ \text{матрицы}}} = 0$$

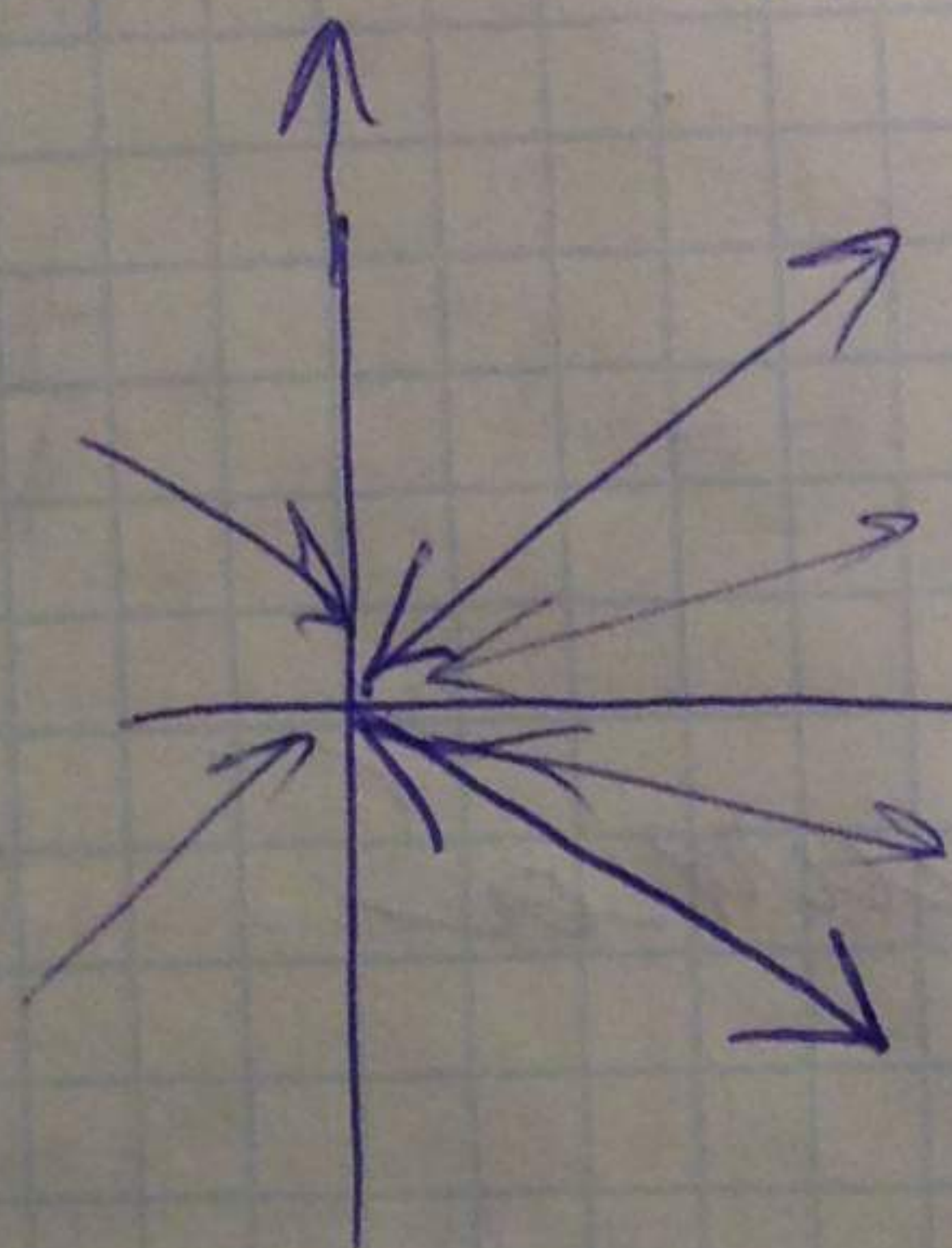
след матрицы $\text{Tr} A, \text{Sp} A$

$$\lambda^2 - \text{Sp} A \cdot \lambda + \det A = 0 \quad - \text{харак. урав. для матрицы } 2 \times 2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Sp} A \pm \sqrt{(\text{Sp} A)^2 - 4 \det A}}{2}$$

$$D = (\text{Sp} A)^2 - 4 \det A \quad (\lambda_{1,2} < 0)$$

1) $\text{Sp} A < 0 \quad \det A > 0.$
 $d > 0.$



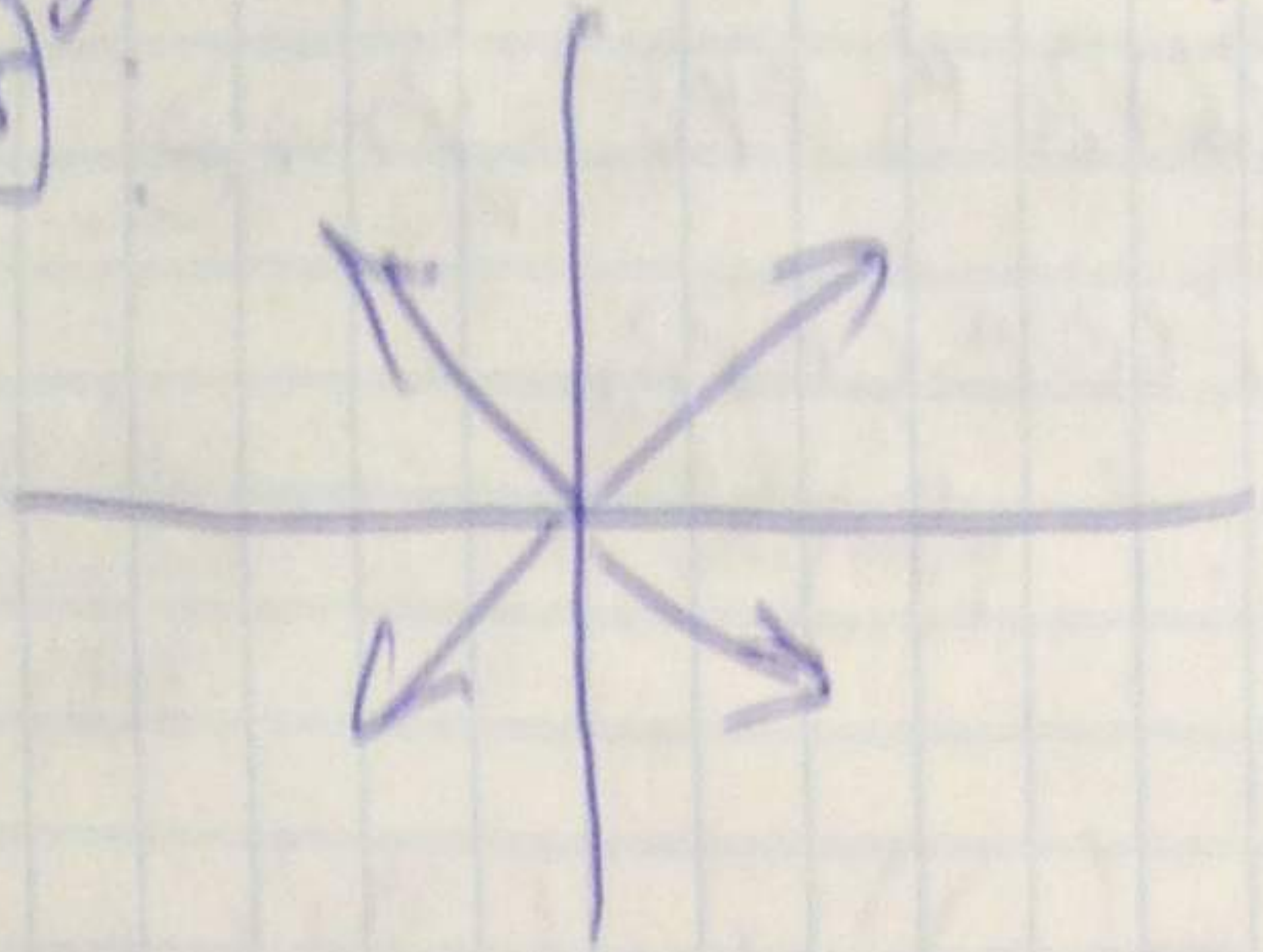
глубокие по числу но ~~угол~~ вращ. векторов углублено
 (дуга все сдвинута к 0 - углублен угол)

$x = \det A$
 $+ \text{---} (-\text{Sp} A)$
 Внесла.

2) $\text{Sp} A > 0.$
 $\det > 0.$
 $D > 0$

$\lambda_1 \text{ и } \lambda_2 > 0.$

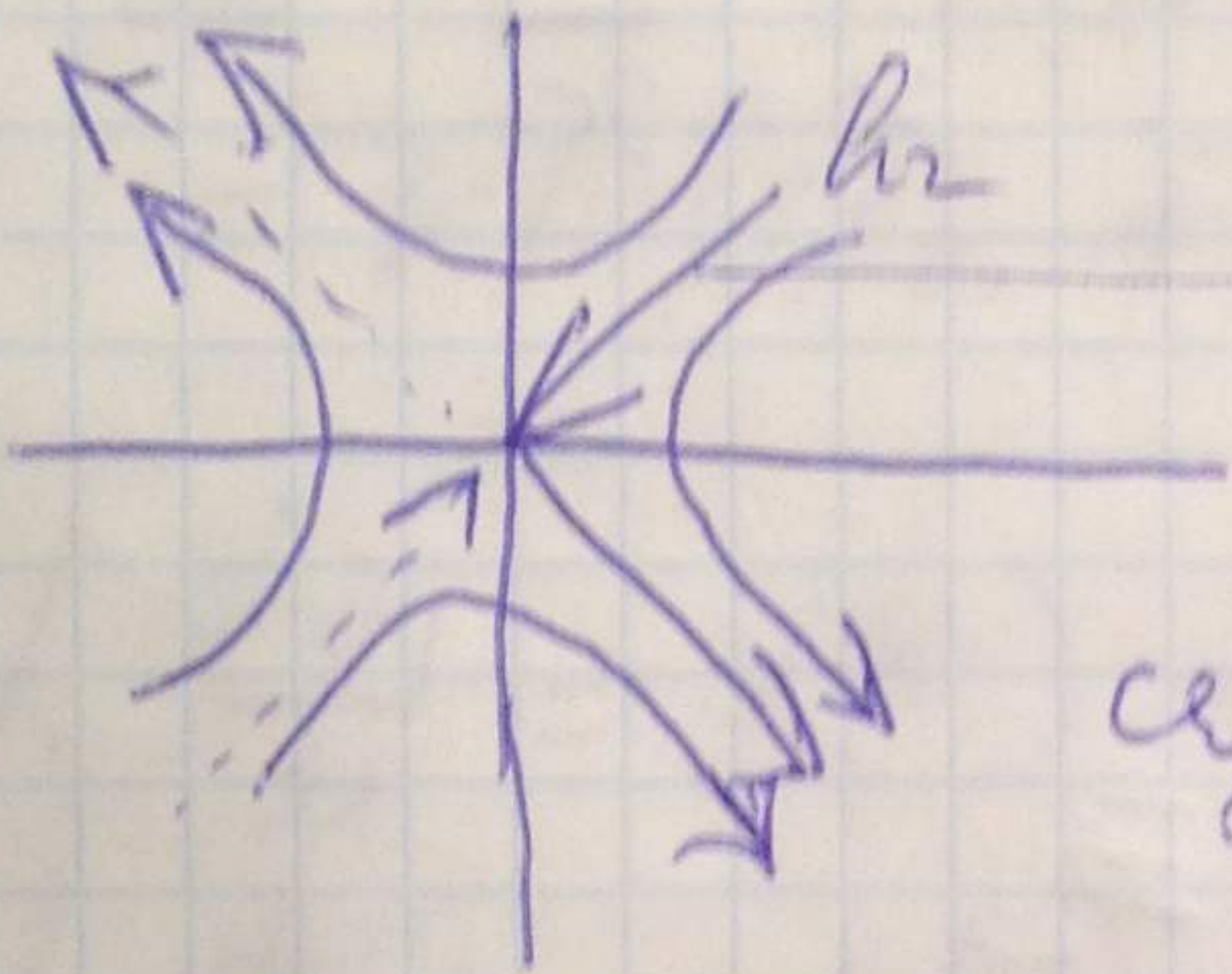
26:15: узел к-р движение по своим векторам
нестойчивый узел.



3) $\text{Sp}(A) < 0$ $\Phi > 0$
 $\det A < 0$
 $\Delta < 0$ — main

$\lambda_1 < 0$
 $\lambda_2 > 0$

— разных знаков



сепаратриса

срн всегда неустойчиво

по одной сепаратрисе $\rightarrow$ в начало координат
по другой — из начала

4) $\text{Sp}(A) < 0$, $\det A > 0$
 $\Phi < 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Sp}(A) \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2}$

затухающие колебания

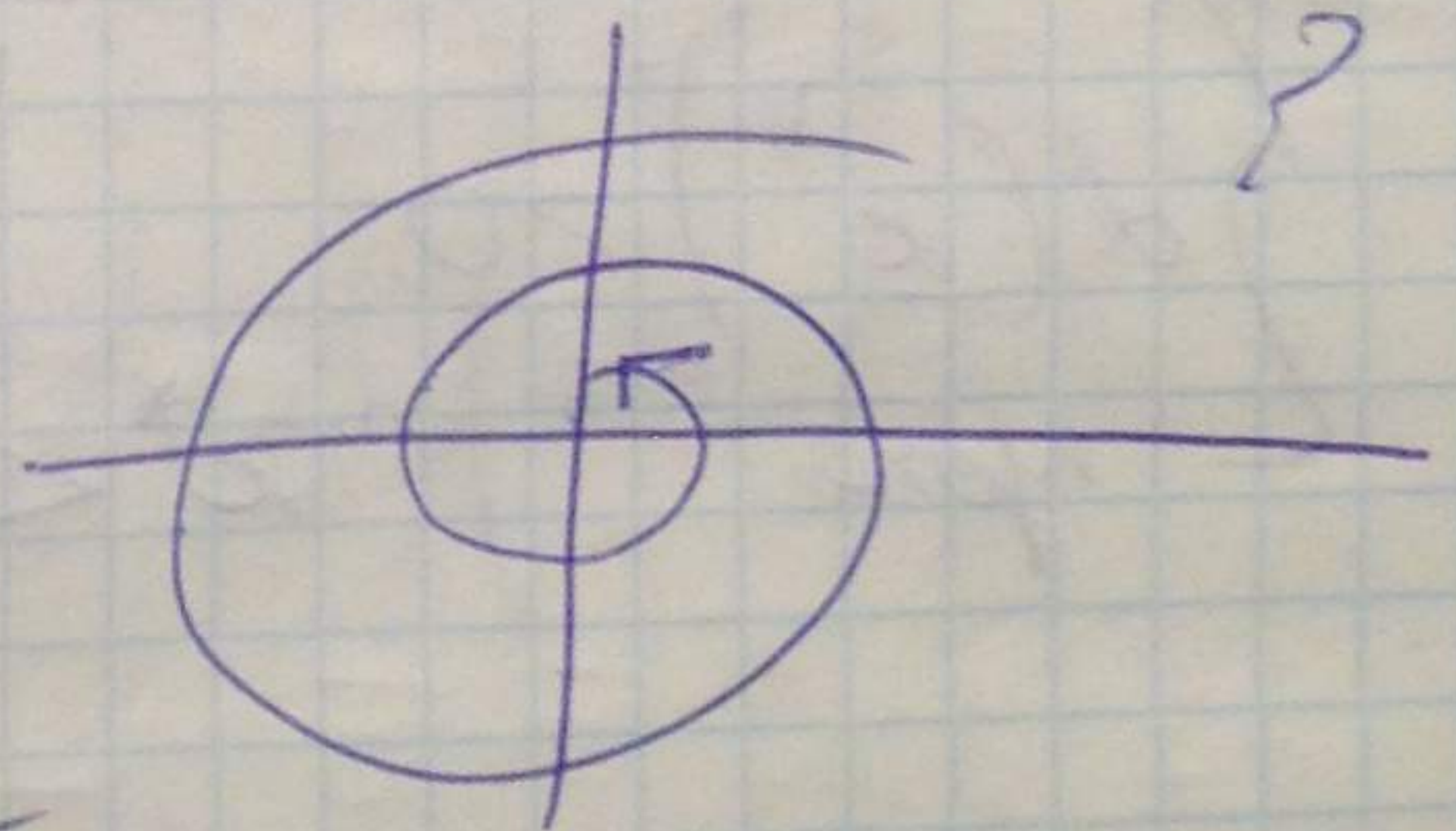
$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ — ф. Эйлера

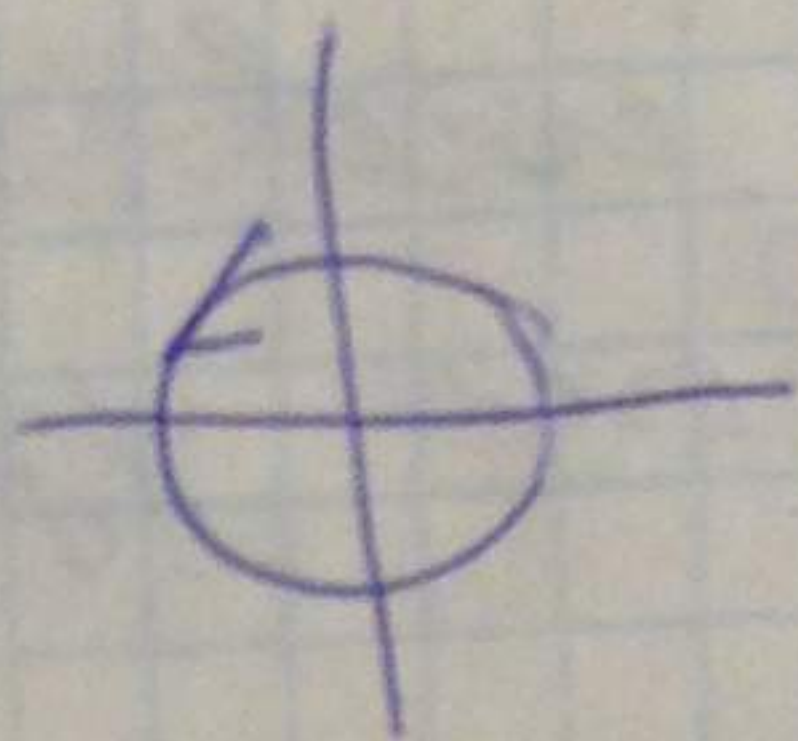
$e^{\frac{\text{Sp}(A)}{2}} + e^{\frac{\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2}}$

неустойчивый фокус



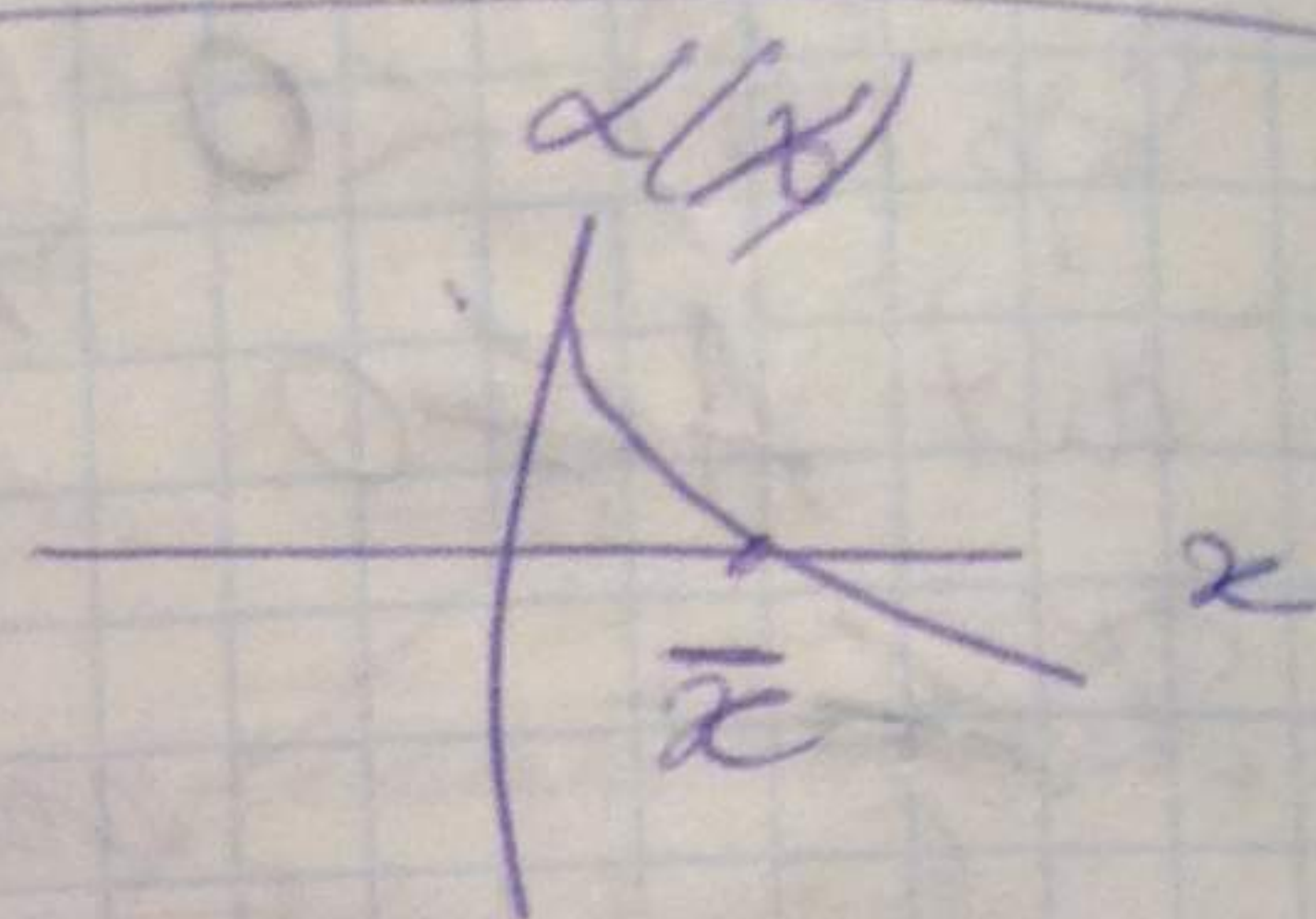
35:55



λ_1, λ_2 

будет ли центр устойчивым?
нужно учитывать уже
неустойчивость.

Ищем стационарные точки



1) стационарные точки $(0, 0)$

2) $\exists y = 0$.

$(\bar{x}, 0)$

$L(x) = 0 \quad x = \bar{x}$

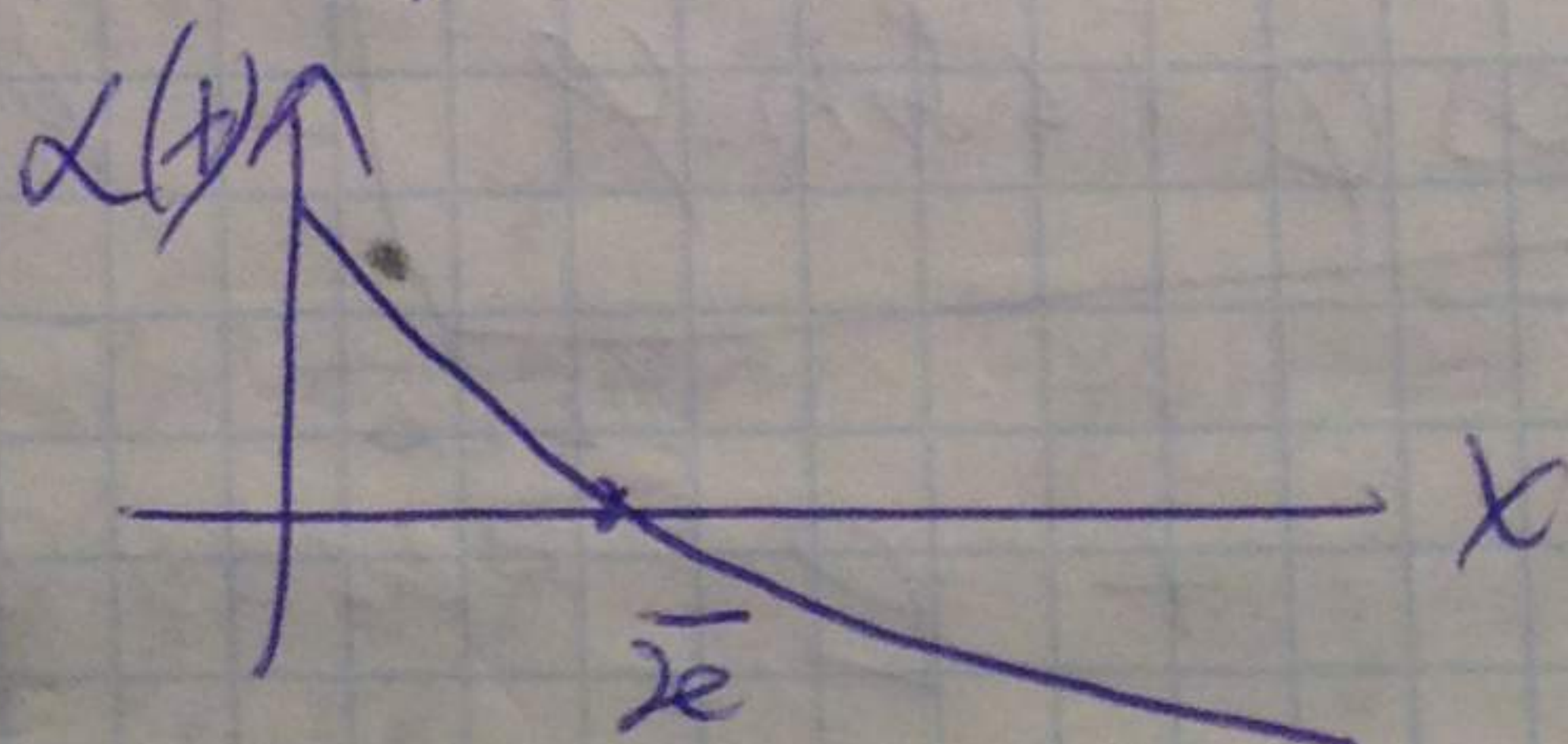
3) $L(x) = 0 \Rightarrow x = x^*$

$\alpha(x^*), x^* = V(x^*) \cdot y^* = 0$

$y^* = \frac{\alpha(x^*) \cdot x^*}{V(x^*)} > 0$ (хищники)

$x^* > 0$
 $V(x^*) > 0$

$\Rightarrow$ нужно $\alpha(x^*) > 0$



$\alpha(x^*) > 0$
при

$x^* < \bar{x}$

1) $(0,0)$

$z_1 = x, z_2 = y$

~~$0/z_1^2$~~ 2 части линейны

$\frac{dz_1}{dt} = L(z_1) \cdot z_1 - V(z_1) \cdot z_2 = (L(0) + L'(0)z_1 + \dots)$

$- (V(0) + V'(0)z_1 + \dots) z_2 =$

$V(0) = 0$

$= L(0) \cdot z_1 + O(z_1, z_2)$

$\frac{dz_2}{dt} = K(z_1) z_2 = (K(0) + K'(0)z_1 + \dots) z_2 =$

$= K(0) z_2 + O(z_1 z_2)$

$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = L(0) \cdot z_1 \\ \frac{dz_2}{dt} = K(0) \cdot z_2 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} L(0) & 0 \\ 0 & K(0) \end{pmatrix}$

собственные числа
(в диагональной
форме матрицы)

$\begin{cases} \lambda_1 = L(0) > 0 \\ \lambda_2 = K(0) < 0 \end{cases}$

найдем соотв векторы

сепаратрисы - ?

$(A - \lambda E) \vec{h} = 0$

$\begin{pmatrix} L(0) & 0 \\ 0 & K(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(0) - \lambda & 0 \\ 0 & K(0) - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$

$K(0) - L(0) h_2 = 0, h_2 = 0$
 $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(d_1(0) - K(0) \right) h_1 = 0$$

$$h_1 = 0 \quad \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



система нелинейная

сепаратриса

точка равновесия

2 точки. $(\bar{x}, 0)$

$$\begin{cases} z_1 = x - \bar{x} \\ z_2 = y \end{cases} \quad x = z_1 + \bar{x}$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \lambda(\bar{x} + z_1)(\bar{x} + z_1) - V(\bar{x} + z_1)z_2 =$$

$$= \left(\lambda(\bar{x}) + \lambda'(\bar{x}) \cdot z_1 + \dots \right) \cdot (\bar{x} + z_1) -$$

$$- \left(V(\bar{x}) + V'(\bar{x}) \cdot z_1 + \dots \right) \cdot z_2 =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \lambda(\bar{x}) = 0 \\ \text{по карману} \end{array} \right\} = \lambda'(\bar{x}) \cdot z_1 \cdot \bar{x} - V'(\bar{x}) \cdot z_2$$

линейная система

$$\frac{dz_2}{dt} = K(\bar{x} + z_1)z_2 = \left(K(\bar{x}) + K'(\bar{x}) \cdot z_1 + \dots \right) z_2 =$$

$$= K(\bar{x}) \cdot z_2 + O(z_1 z_2)$$

малое

$$\frac{dz}{dt} \begin{pmatrix} \lambda'(\bar{x})\bar{x} & -V'(\bar{x}) \\ 0 & K(\bar{x}) \end{pmatrix} z$$

A

характер. урл

$$\lambda^2 - \underbrace{\left(\alpha'(\bar{x}) \cdot \bar{x} + K(\bar{x}) \right)}_{\text{Sp}(A)} \lambda + \underbrace{\alpha'(\bar{x}) \cdot \bar{x}}_{\lambda_1} \cdot \underbrace{K(\bar{x})}_{\lambda_2} = 0.$$

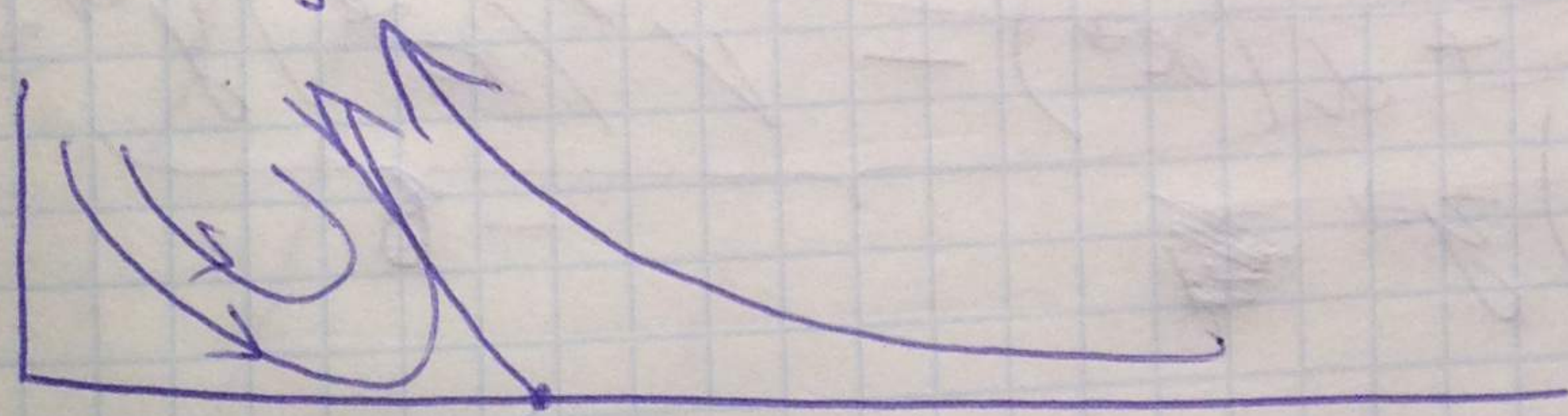
$$\begin{aligned} * &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ + &= -\text{Sp}(A) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha'(\bar{x}) \cdot \bar{x} \\ \lambda_2 = K(\bar{x}) \end{cases} \begin{cases} > 0, \text{ если } \bar{x} > x^* \quad (2.1 \text{ вариант}) \\ < 0, \text{ если } \bar{x} < x^* \quad (2.2 \text{ вариант}) \end{cases}$$

(вар 2.1) $\lambda_2 < 0, \lambda_1 > 0$ **седло**



сравнение фазовых картинок

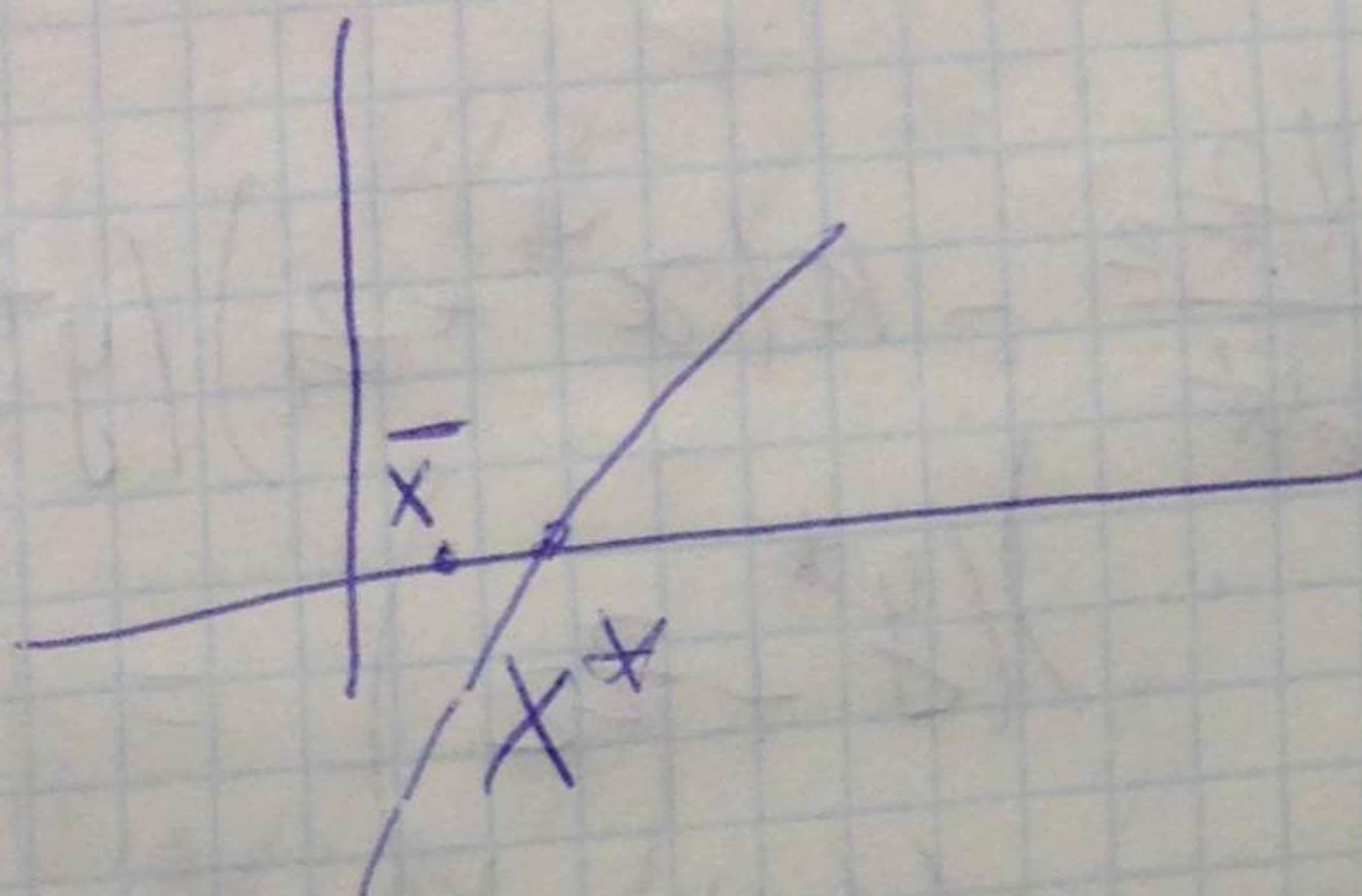


2, 2

узел узел

$$\bar{x}^* < x^*$$

если параметр
таков, что



жестко x^*
стабильно асимптотически устойчиво

3) 3 точки

$$(x^*, y^*) \quad x^* < \bar{x}$$

$$\begin{cases} z_1 = x - x^* \\ z_2 = y - y^* \end{cases}$$

$$\frac{dz_1}{dt} = d(x^* + z_1)(x^* + z_1) - V(x^* + z_1)(y^* + z_2) =$$

$$= (d(x^*) + d'(x^*)z_1 + \dots)(x^* + z_1) -$$

$$- (V(x^*) + V'(x^*)z_1 + \dots)(y^* + z_2) =$$

$$= d(x^*)x^* - V(x^*)y^* + d'(x^*)x^*z_1 +$$

$$+ d(x^*)z_1 -$$

$$- V(x^*)z_2 + V'(x^*)y^*z_1 + O(z_1z_2)$$

$V(x) = 0$ - равновесие

$$A = \begin{pmatrix} d'(x^*)x^* + d(x^*) - V'(x^*)y^* & -V(x^*) \\ K'(x^*)y^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{dz_2}{dt} = K(x^* + z_1)(y^* + z_2) = (K(x^*) + K'(x^*)z_1 +$$

$$\dots)(y^* + z_2) = \begin{cases} K(x^*) = 0 \end{cases}$$

$$= K'(x^*)y^*z_1 + 0$$

$$z^* + z =$$

$$f^* +$$

$$\begin{pmatrix} -V(x^*) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z^* +$$

$$\Rightarrow \text{хар. ур-е.} \quad \lambda^2 + \delta \lambda + K(x^*) y^* \cdot V(x^*) = 0.$$

$$\lambda = -\frac{\delta \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\Delta = \delta^2 - 4K(x^*) y^* \cdot V(x^*)$$

$\Rightarrow$ оба корня отрицательны

— действ.

оба корня

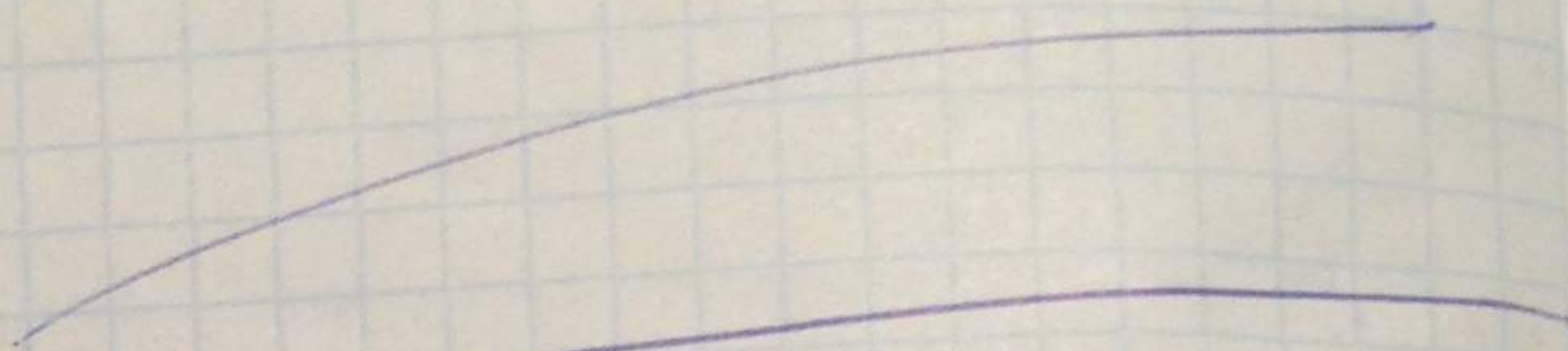
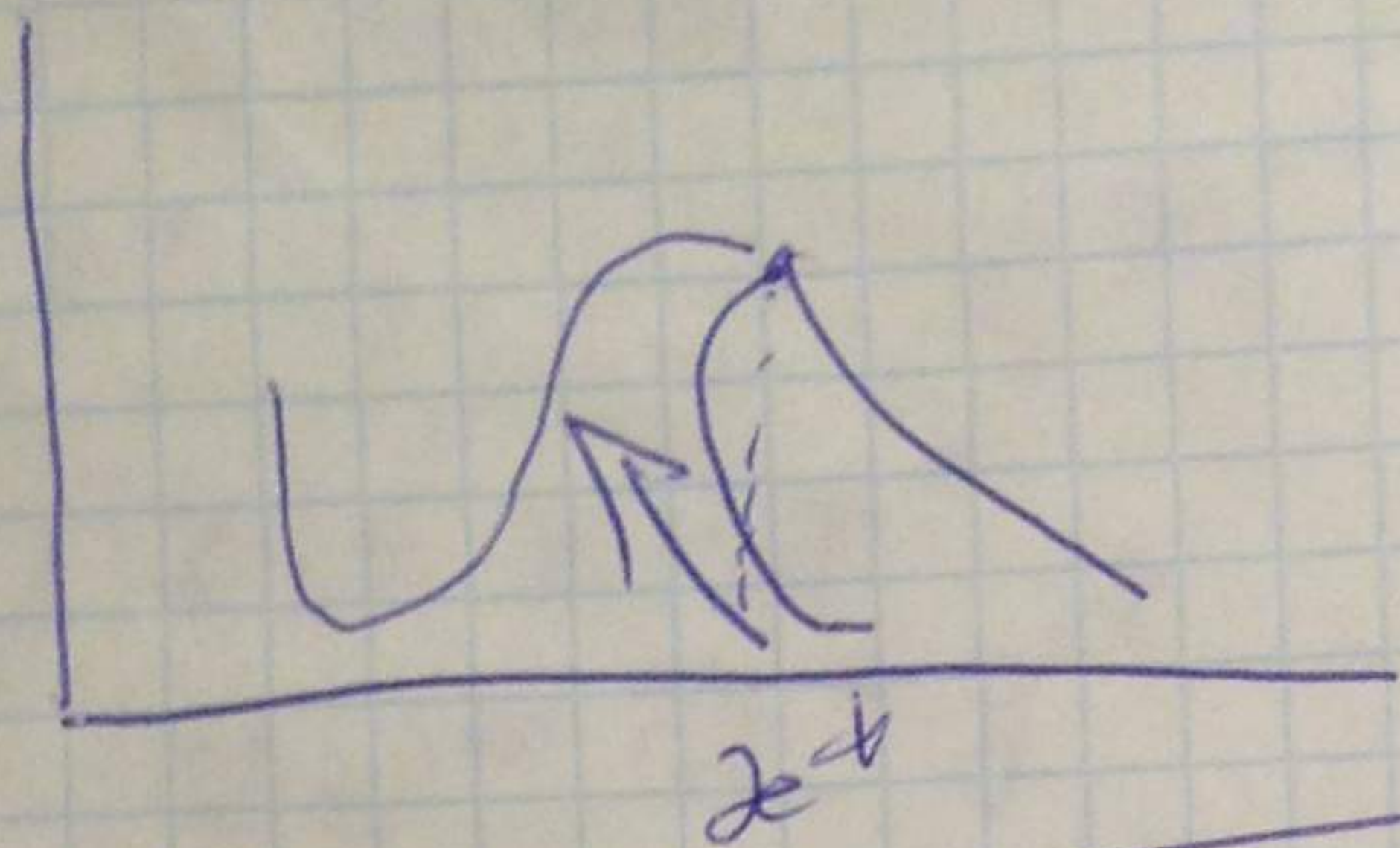
$$\Delta > 0$$

— отрицательны

оба

действ.

$$\delta > 0, D > 0.$$

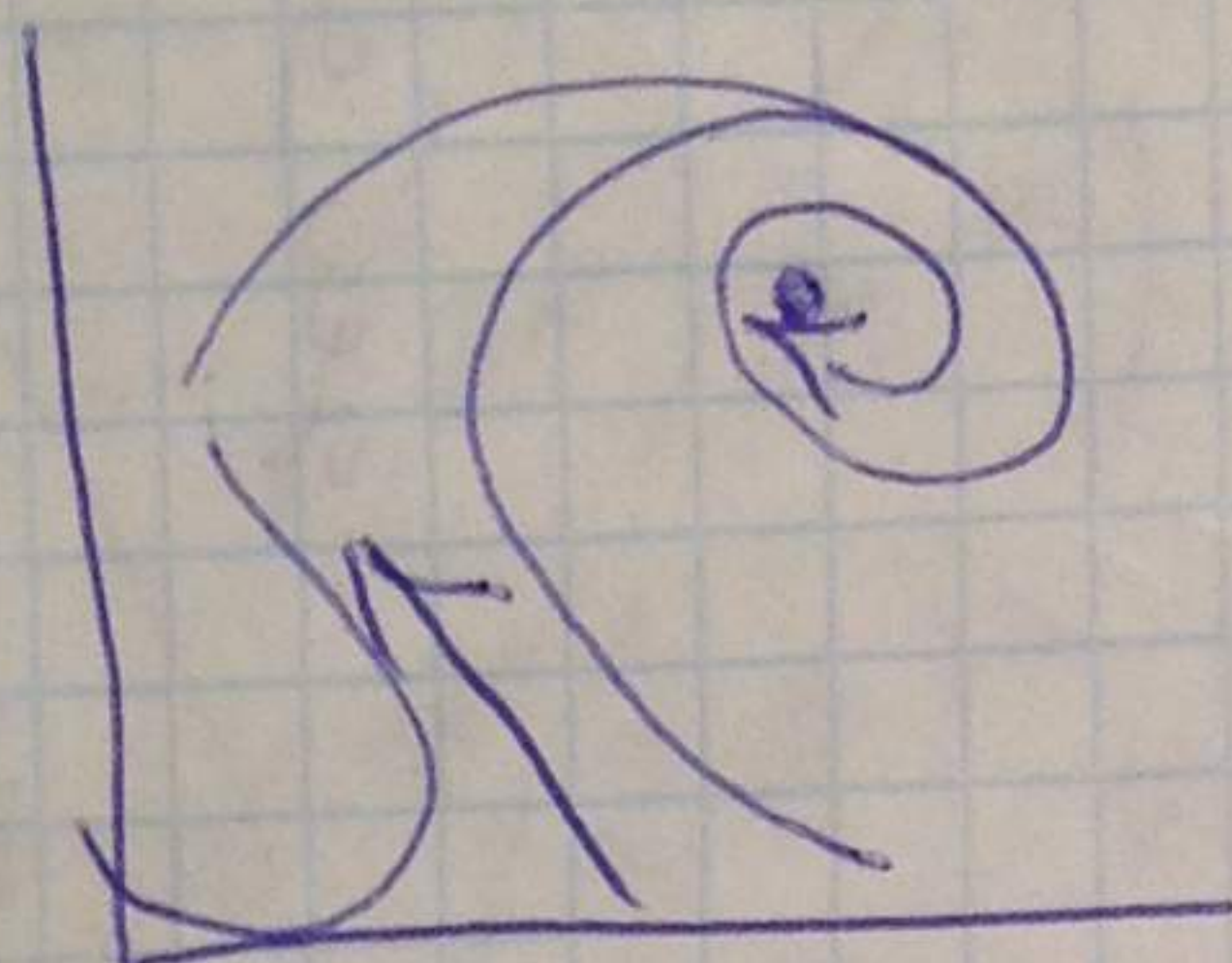


3.2

минимум соот. ответ за колебания

$$\delta > 0, D < 0$$

устойчивый фокус



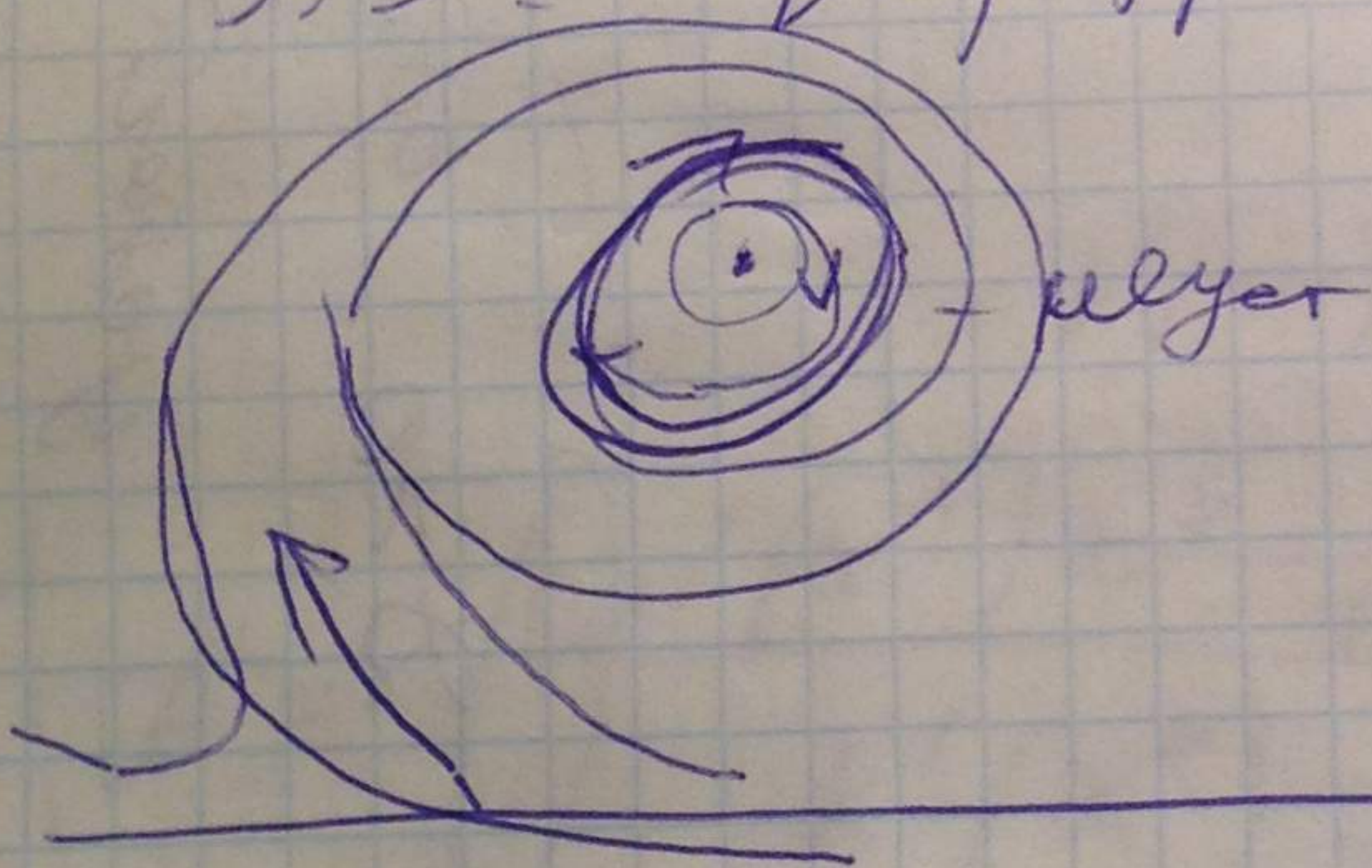
$$\delta > 0, D < 0.$$

x и y стабилизируются
и существуют

3.3

Бифуркация

неуст.



вызван циклом — покажем
в устойчивую точку

next up — с
частотой
фазового

$u(x, t)$

u_{xt}

$a_{11} u_x$

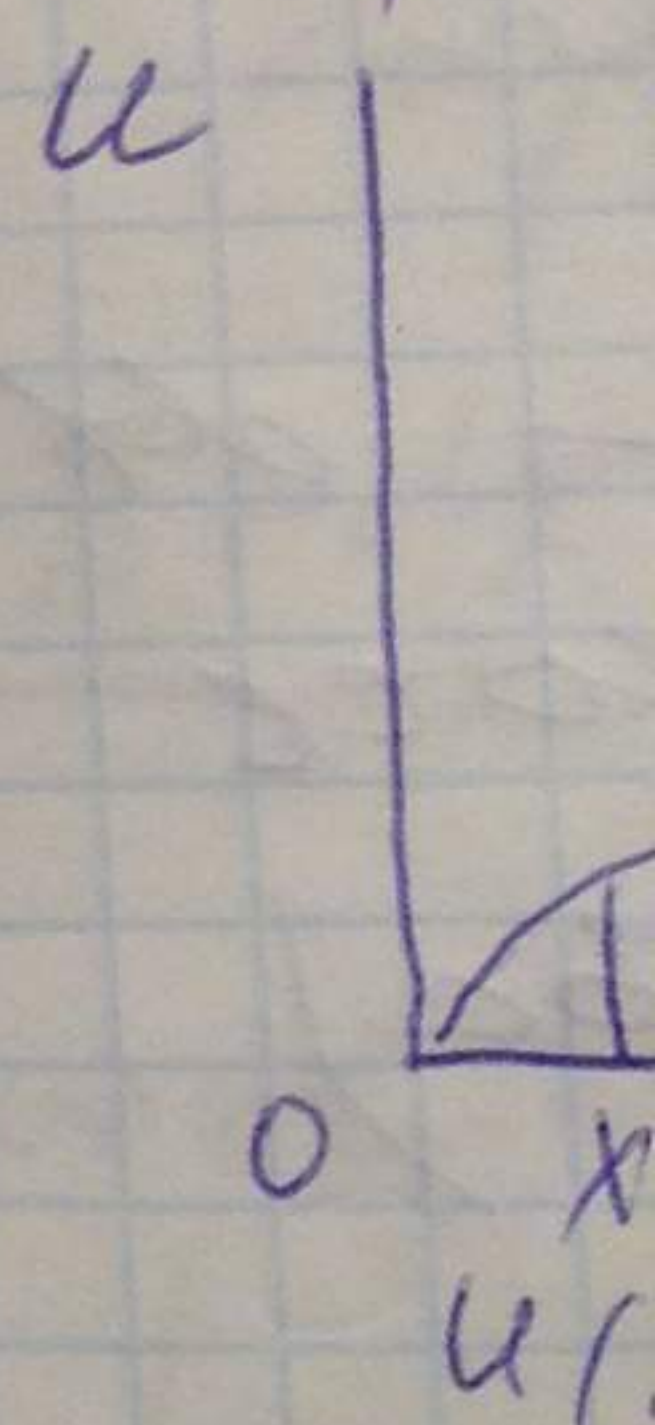
1) $a_{12}^2 -$

2) a_{12}^2

3) a_{12}

I) u

a) u



$\frac{d}{dt}$

$$\frac{d}{dt} \frac{dx}{dt}$$

$\frac{d}{dt}$

кас

кас

6.11.2015

$$u(x,t) = \frac{\partial v}{\partial x}$$

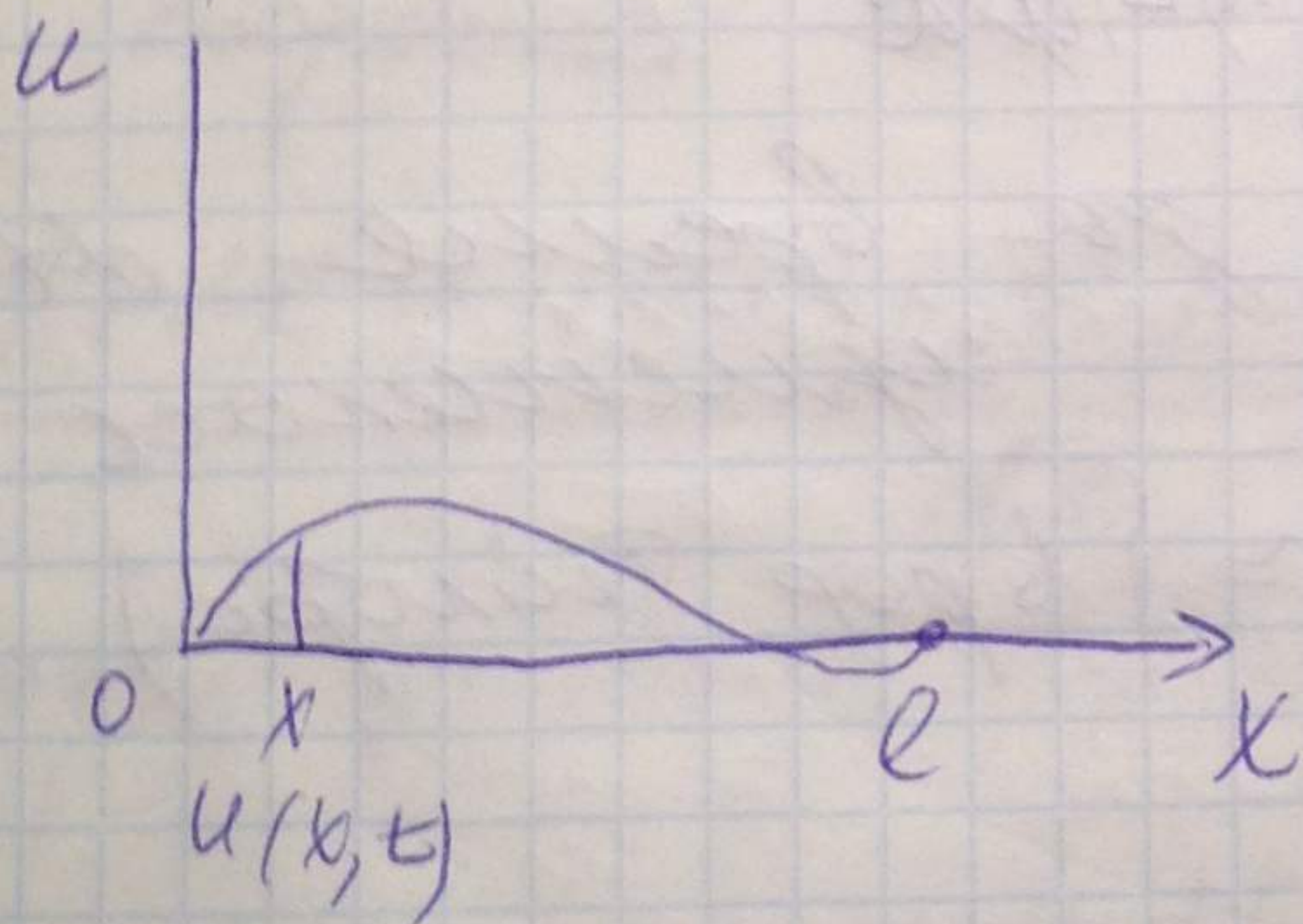
$$u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$$

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt} + F(u_x, u_t, u) = 0$$

- 1) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ гиперболич.
- 2) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ эллиптич.
- 3) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ параболич.

I) упр. гипер. типа.

а) поперечн. колеб. струны



с самого начала
струна натянута
и сила натяг. T_0
коэф?

выражение $u(x)$ известно в мал. пределах

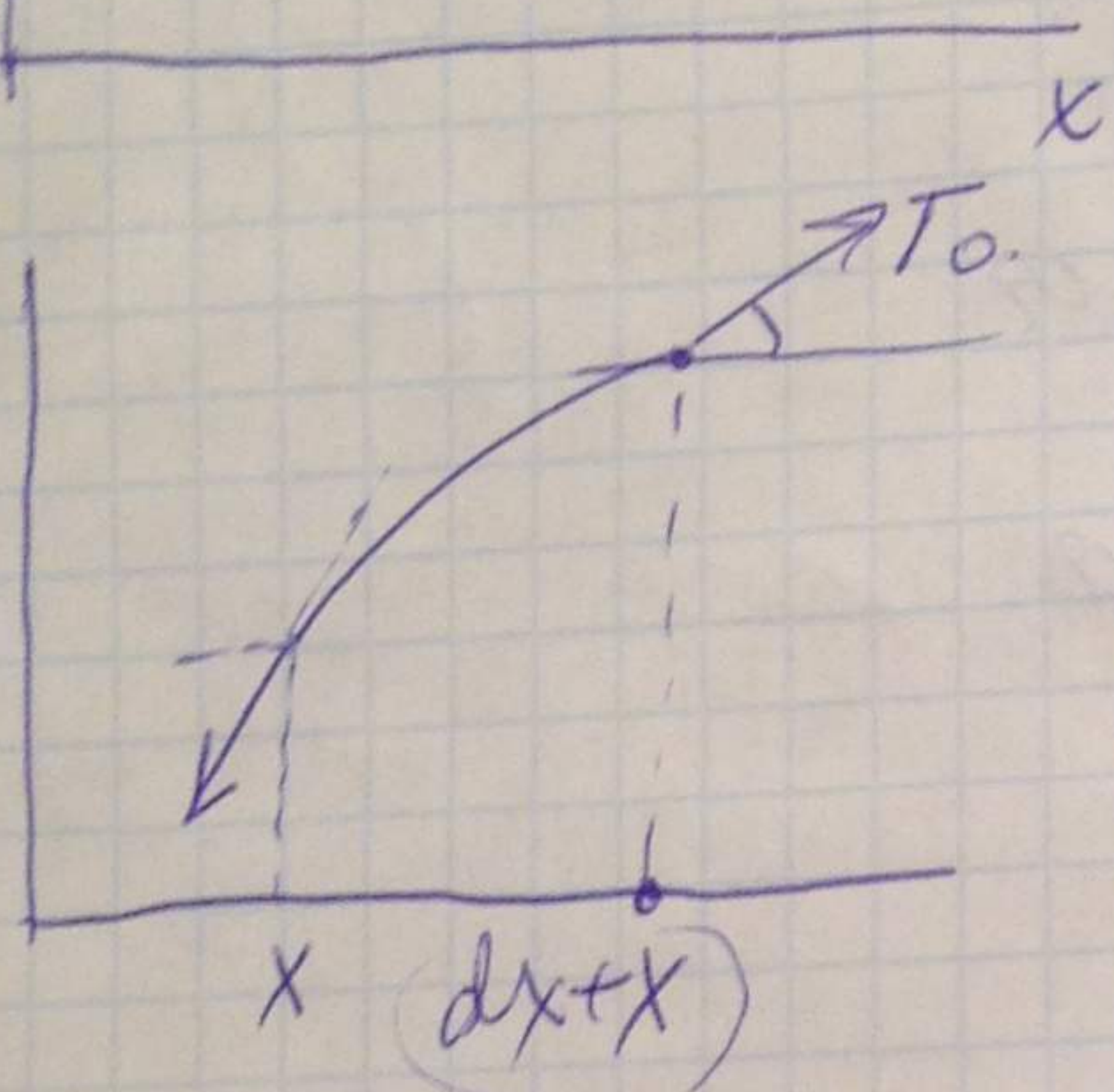
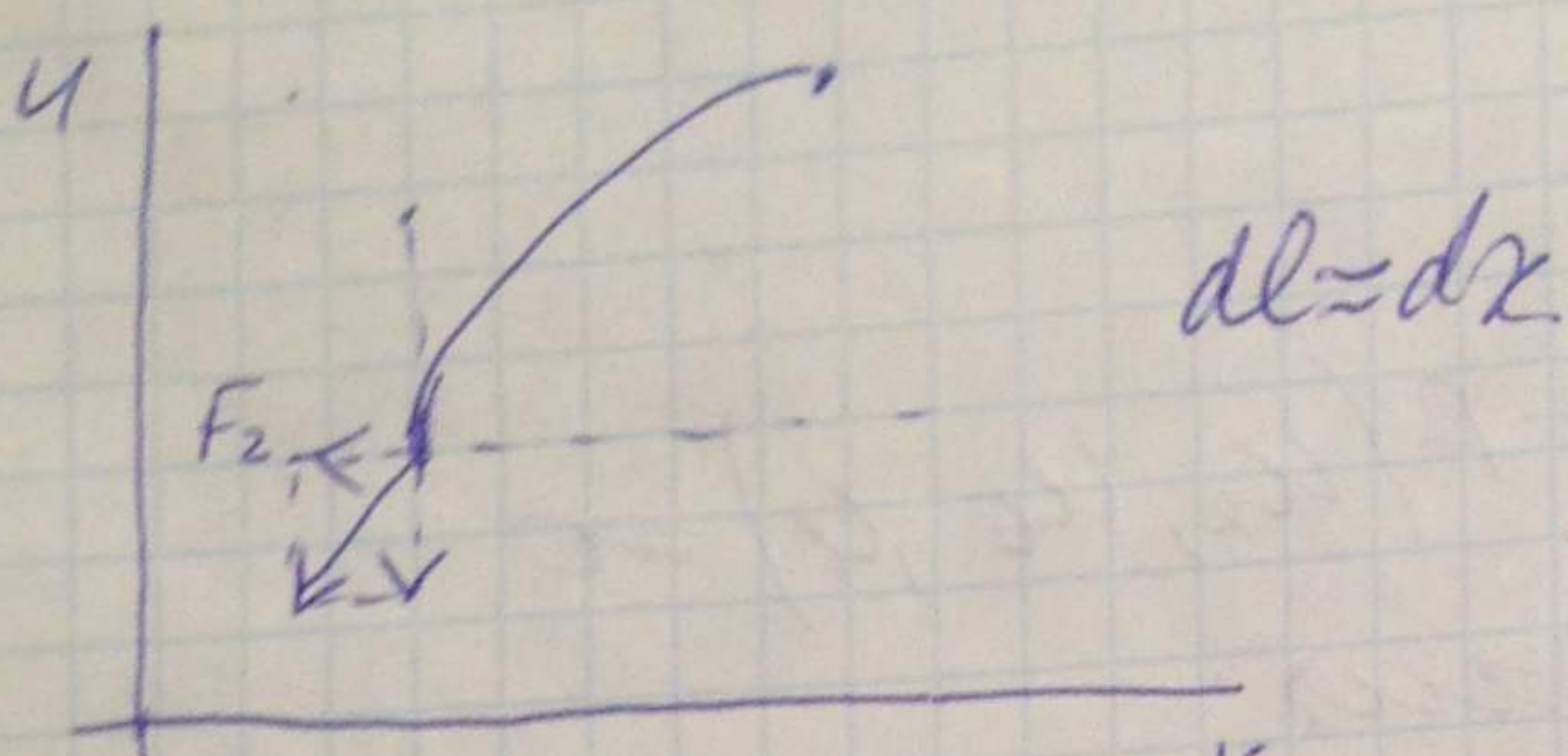
$$\frac{dl}{dx} du \quad dl = \sqrt{dx^2 + (du)^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{1}{4x^2} (dx)^2} = dx \sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}} \approx dx$$

$$l = \int_{x_1}^{x_2} dl \approx \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1$$

натяжение струны во всех точках равно
нат. невозмущ. струна = T_0

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (\text{2-й закон Ньютона})$$

$$m d\vec{v} = \vec{F} dt$$



$$dl \approx dx$$

$$F_1 = T_0 \sin \alpha_1$$

$$F_2 = -T_0 \sin \alpha_2$$

$$F_1 - F_2 = T_0 (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \approx$$

$$\approx T_0 (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2) \approx$$

$$\approx T_0 (u_x(x+dx, t) - u_x(x, t))$$

$$\approx T_0 u_{xx}(x, t) dx$$

$$m = dl \cdot \rho S, \quad dv - \text{изменение скорости за время } dt$$

$$dv = u_t(x, t+dt) - u_t(x, t) \approx \left(\text{близко нуля} \right)$$

$$\approx u_{tt}(x, t) dt$$

$$\rho S u_{tt} dx dt = T_0 u_{xx} dx dt$$

— волновое уравнение (волновое уравнение)

$$u_{tt} = \frac{T_0}{\rho S} u_{xx}$$

$$a_{11} = \frac{T_0}{\rho S}$$

$$a_{12}^2 - a_{11} a_{22} > 0 \quad - \text{уравнение гиперболического типа}$$

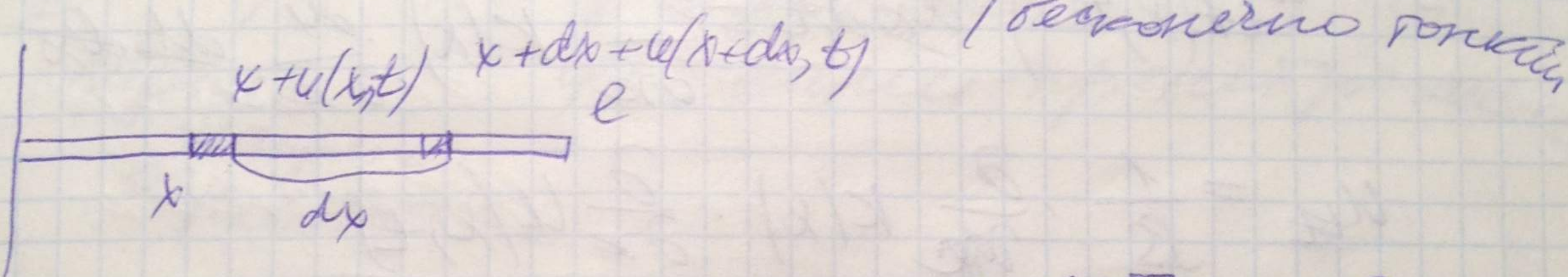
$$a_{22} = -1$$

$$a_{12} = 0$$

Если он гдето внемал $\rho(x,t)dx$
 $\rho \int \frac{1}{2} u_t^2 dx dt = T \int u_x dx dt + \int f(x,t) dx dt$ без cos

если ρ и T - const.
 то ρa^2 - const

б) продольные колебания торого стержня.



стержень - продольные колебания, (слабые)

разность - деформация координат

$$\frac{x+dx + u(x+dx, t) - (x + u(x, t))}{dx} = \frac{x+dx + u(x+dx, t) - (x + u(x, t))}{dx} = \frac{u(x+dx, t) - u(x, t)}{dx} \approx \frac{u_x(x, t) dx}{dx} = u_x(x, t)$$

прежде чем
получить
уравнение
сдвига

относит. удлинение стержня

прим. Тейлора сразу в дифференциал

преобразуем дифференциалом

более высокая поперек $K(x+dx, t)$ $K(x, t)$

$$F_2 \leftarrow F_1 \quad F_1 - F_2 = K(x+dx, t) u_x(x+dx, t) - K(x, t) u_x(x, t) \equiv \left\{ F(x, t) = u_x(x, t) \cdot K(x) \right\}$$

или Гук

$$\ominus \frac{\partial}{\partial x} K(x) u_x(x, t) \cdot dx$$

из $\frac{dW}{dt} = F \frac{dx}{dt}$

$$\frac{d}{dx} \int_S [u_t(x, t) dt - u_t(x, t)] = \frac{\partial}{\partial x} K(x) \frac{\partial u}{\partial x} dx \cdot dt$$

$$\frac{d}{dx} \int_S [u_t(x, t+dt) - u_t(x, t)] = \frac{\partial}{\partial x} K(x) \frac{\partial u}{\partial x} dt dx$$

в пределах

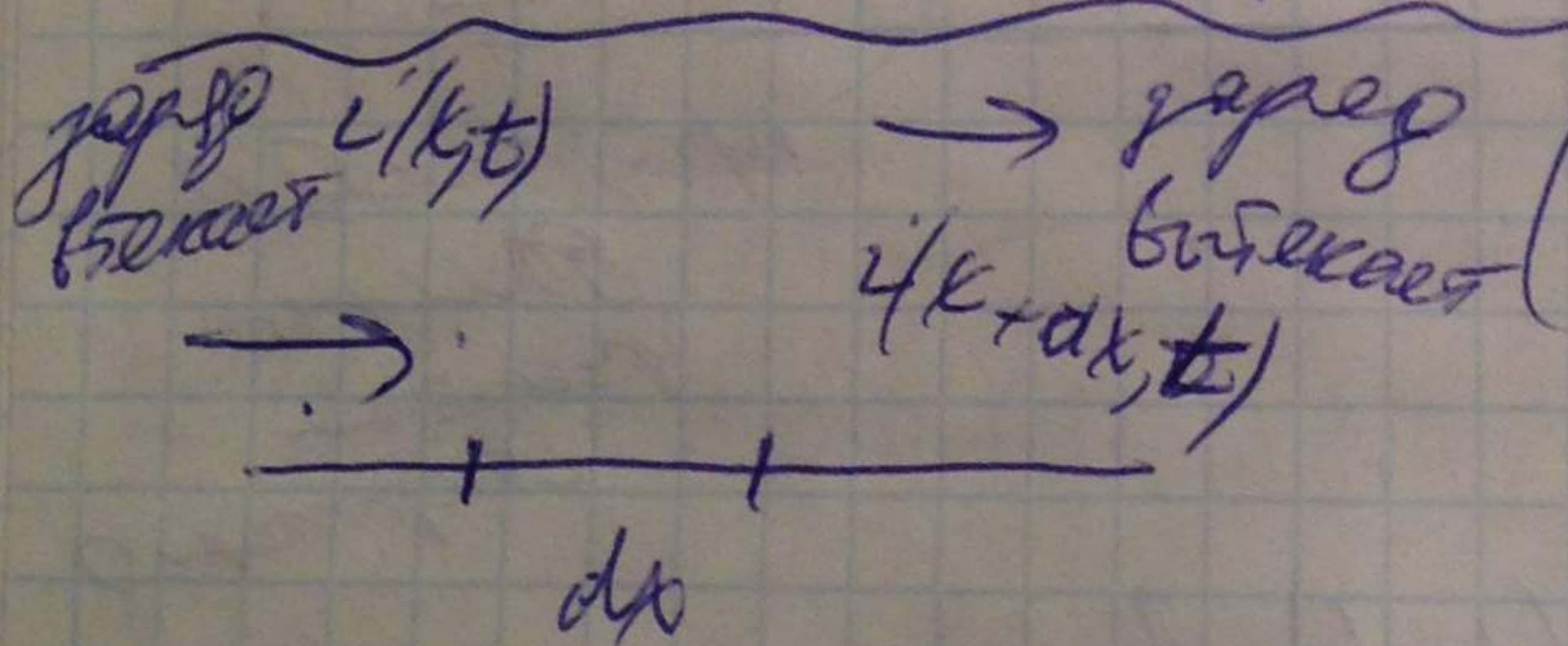
$$\int_S u_{tt}(x, t) \cdot dx dt = \frac{\partial}{\partial x} K(x) \frac{\partial u}{\partial x} dt dx$$

$$u_{tt} = \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial x} K(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$K(x) = K$$

$$u_{tt} = \frac{K}{B} u_{xx}$$

Вывод телеграфных уравнений.



ток i — ток

U_x — напряжение на участке

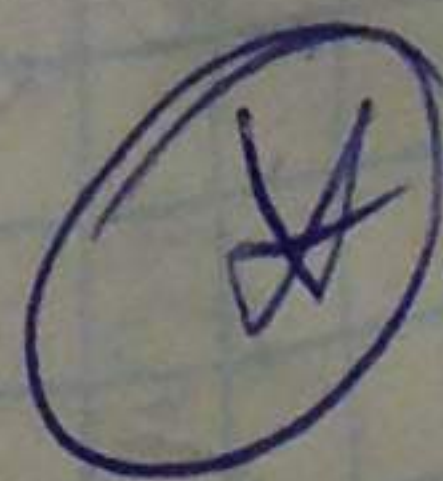
с длиной dx

R — сопротивление единицы длины

преобразования по времени

$$U_x dx + i R dx + L_t \cdot L \cdot dx = 0$$

— закон Кирхгофа



за время dt заряд изменится:

$$[i(x, t) - i(x+dx, t)] dt = -i_x dx dt$$

Напряжение в момент времени t :

разность напряжений

(падение напряжений — из-за того что заряды какой-то заряд)

напряжение на проводнике — сопротивление
устанавливается

$$C(u(x, t+dt) - u(x, t)) = C \partial_t u(x, t) dt$$

Напряжение на проводнике
изменяется с временем;

$$u = \frac{q}{C}$$

C — емкость
 q — заряд, который
накапливается
на проводнике

$$C \cdot \partial_t u dx dx = -i_x dx dt$$

$$C \partial_t u + i_x = 0,$$

✗ ✗

равно
выбегает ток

$$\begin{cases} \partial_x u + i R dx + L_t \cdot L dx = 0. & (2) \\ C \partial_t u + L_x = 0 & (1) \end{cases}$$

(1) — $\frac{d}{dx}$, зависит от x , (2) зависит от t и C .

$$\begin{cases} C \cdot \partial_{xt} u + L_t RC + L_{tt} CL = 0. \\ L_{xx} - L_t RC - L_{tt} CL = 0. \end{cases}$$

$$\dot{I}_{tt} = \frac{1}{CL} I_{xx} - \dot{I}_t \cdot \frac{L}{R}$$

считаем что проводник с хорошей проводимостью

$$\begin{cases} C \partial_t + I_x = 0 \\ \partial_x + I_t L = 0 \end{cases}$$

$$\dot{I}_{tt} = \frac{1}{CL} I_{xx}$$

$$I_{xx} = I_{tt} CL = 0$$

48:18

- это структура вычисления

$$\begin{cases} \partial_{tt} = \frac{1}{LC} \partial_{xx} & (2) \\ \dot{I}_{tt} = \frac{1}{CL} I_{xx} & (1) \end{cases}$$

- гиперболические

уравнения

(гиперболические типа)

22 мая

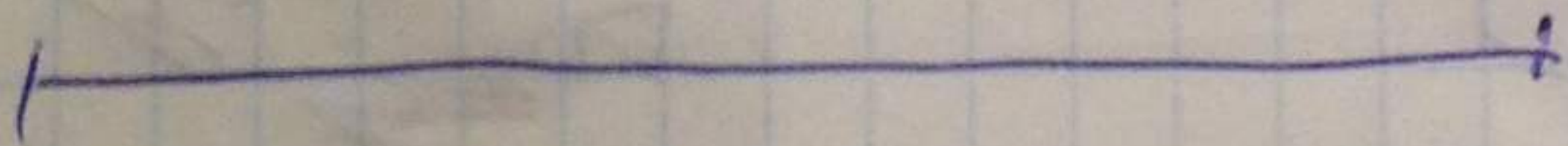
рассмотрим

из-за разности крайних / условий, граничных

Решение уравн. гиперболического типа

есть струна с закреплен. концами

l



$$u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx} \quad (3)$$

закреплены концы

определяет

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (4)$$

начальная форма

не напряжена, - напр.

$$u(x, 0) = \psi(x) \quad (5)$$

используем формулу Фурье

$$u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (6)$$

метод Фурье (раздел перемен)
(применяется в одномерных случаях)
 $u(x, t) = T(t) \cdot X(x)$

$$T''(t) \cdot X(x) = a^2 T(t) \cdot X''(x)$$

ищем нетривиальное решение (ненулевое)

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = a^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \text{const}, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{const}$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (3a)$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda a^2 \quad (3b)$$

$$\lambda < 0.$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

$$X'' + \lambda X = 0.$$

$$X'' = c_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} x}$$

$$\boxed{e^{px}}$$

$$p^2 e^{px} + \lambda e^{px} = 0$$

$$p^2 + \lambda = 0$$

$$p_{1,2} = \pm \sqrt{-\lambda}$$

на левом конце $u(0,t)=0$.

$$\Rightarrow c_1 + c_2 = 0.$$

на правом конце

$$c_1 e^{\sqrt{\lambda} \cdot l} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} \cdot l} = 0.$$

$$u(l,t)=0.$$

$$c_2 = -c_1, \quad c_1 e^{-\sqrt{\lambda} l} - c_1 e^{\sqrt{\lambda} l} = 0.$$

$$c_1 (e^{-\sqrt{\lambda} l} - e^{\sqrt{\lambda} l}) = 0 \neq 0$$

$$\Rightarrow c_1 = 0$$

$$\Rightarrow c_2 = 0.$$

Друг. решение не интересно

$$2) \lambda = 0, \quad x'' = 0.$$

$$x' = \text{const} = c$$

$$x = c_1 x + c_2$$

усл. гранич. усл:

$$\text{левый: } x(0) = 0, \quad c_2 = 0.$$

$$x(l) = 0, \quad l = 0, \Rightarrow c_1 = 0.$$

Друг. реш.

$$2) \lambda > 0$$

$$x'' + \underbrace{\lambda}_{\omega^2} x = 0$$

$$x = a_1 \cos \omega x + a_2 \sin \omega x =$$

$$= a_1 \cos \sqrt{\lambda} x + a_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

гранич. усл. (4):

$$x(0) = 0$$

$$a_1 \cos \sqrt{\lambda} \cdot 0 \dots$$

$$a_1 + a_2 \cdot 0 = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$x(l) = 0: a_2 \sin \sqrt{\lambda} \cdot l = 0$$

$a_2 \neq 0$ — негетерогенное решение

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

$$\sqrt{\lambda} l = \pi n$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2$$

где πn — значения λ .

решение:

$$X_n(x) = a_n \sin \frac{\pi n}{l} x \quad n=1, 2, \dots$$

задача Штурма — Лувенга

$$\frac{T''}{T} = -\lambda, \quad \lambda = \frac{\pi n}{l}$$

$$T'' + a^2 \lambda_n T = 0$$

решение

$$T_n(t) = A_1 \cos a \sqrt{\lambda_n} t + A_2 \sin a \sqrt{\lambda_n} t$$

$$u_n(x, t) = T_n(t) \cdot X_n(x) =$$

$$= \left[C_{1n} \cos \left(a \frac{\pi n}{l} t \right) + C_{2n} \sin \left(a \frac{\pi n}{l} t \right) \right] \cdot \sin \frac{\pi n x}{l}$$

Общее решение — сумма частных решений

$$u(x, t) = \sum \left[C_n \cos \left(a \frac{\pi n}{l} t \right) + G_n \sin \left(a \frac{\pi n}{l} t \right) \right] \sin \frac{\pi n x}{l}$$

(13.11.2015) линейные волны ^{заданы}
 на колебания струны

Рассмотрим заданы

$u(x, t)$ — отклонение от равнов. сост.
 в точке x в момент времени t .

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned} \right.$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

нач. укл:

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x)$$

гранич

форма струны
и скорость

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} a t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} a t\right) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \quad (X)$$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \rightarrow u$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi n}{l} a \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \rightarrow \psi$$

φ и ψ — кусочно-непрерывно

или непрерыв.

диф-ных
 могут быть разложены в ряд
 Фурье.

$$A_n = 0$$

$$B_n =$$

и

56

$\left. \right) \frac{h_n}{e} \frac{\pi}{l}$

(*)

→

$$\psi(x) = \sum \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x \Rightarrow A = \psi_n$$

→

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x \Rightarrow B_n = \psi_n \frac{l}{\pi n a}$$

где a — постоянная пропорциональная функции

где

$$A_n = \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx$$

(***)

$$B_n = \psi_n \frac{l}{\pi n a} = \frac{l}{\pi n a} \cdot \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx$$

(***)

$$u(x, t) = \sum$$

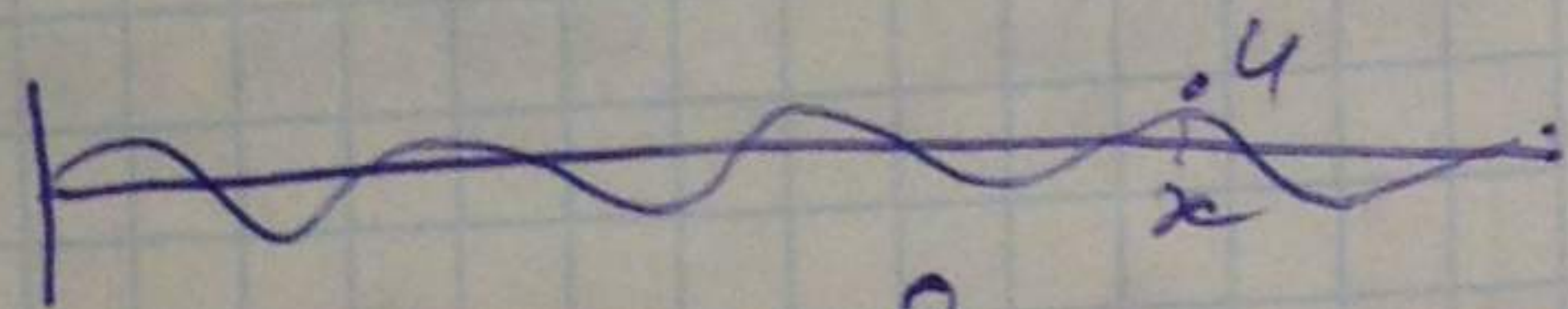
— решение в (*), где

$$A_n = (**)$$

$$B_n = (***)$$

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\left(\frac{\pi n}{e} a t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n}{e} a t\right) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{e} x\right)$$

— гармоника



$$A \sin \alpha + B \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(\alpha + \tilde{\alpha})$$

$$\tan \tilde{\alpha} = -\frac{b}{a}$$

$$u_n = f_n \sin\left(\underbrace{\frac{\pi n}{e} a (t + \tau(t))}_{\text{задержка}}\right) \sin \frac{\pi n}{e} x$$

$$\omega_n = \frac{\pi n}{e} a$$

$n=1$ — колеба 1
у $A, B \neq 0$

основной тон
(колебаний)

овертон — более высокие тона
при $n \geq 2$

A_n и $B_n \downarrow$ при $\uparrow n$
quick

$$f_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

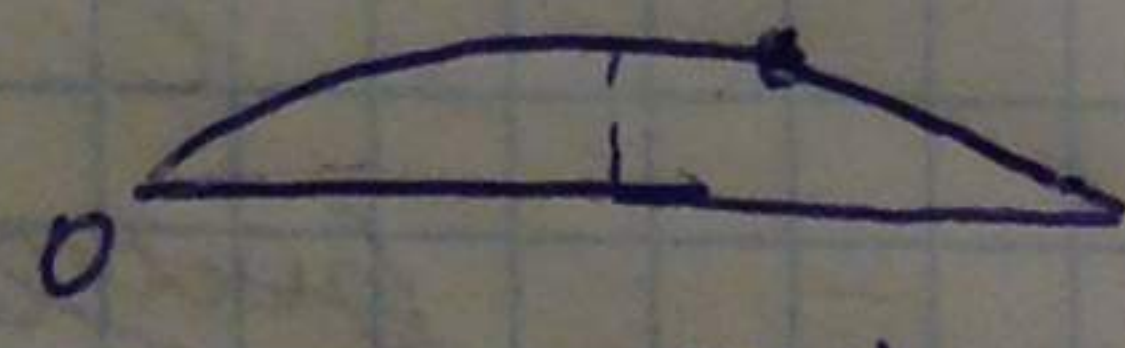
первое сложение
основной вклада

при $n=1$ вносит

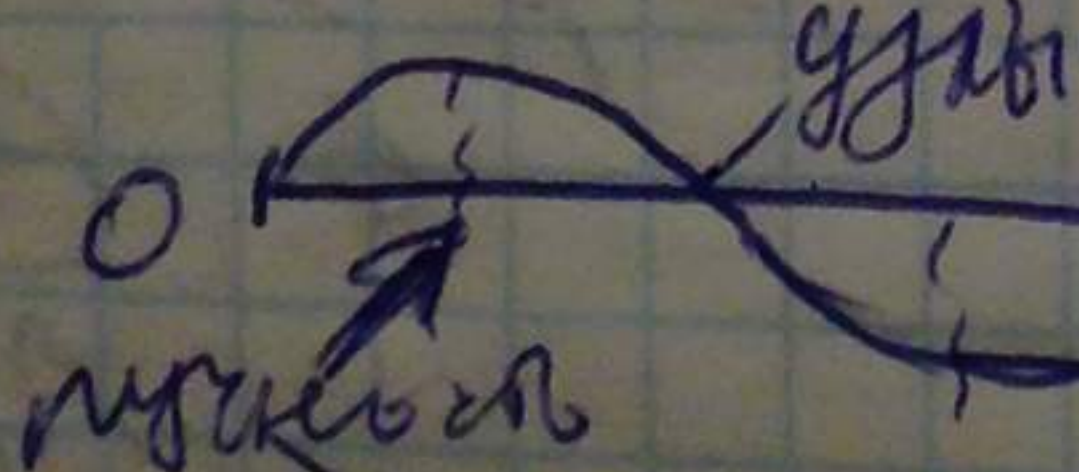
Взгляни

при $n=1$

u_n — гармоника, второй вклад



$n=1$ — основная



$n=2$



$n=3$

Для n -й гармоники точки, кот не
двигутся

точки с наиб. амплитудой - нулевые
дифференциалы

(игра не имеет
встающих гармоник, для кот
в местах перетяжки наход упр.
остальные гасятся.

$$a^2 = \frac{T}{\rho S} \quad \rho - \text{плотность}$$

S - сечение струны

19.11

если ρ - линейная плотность

$$f_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho S}}$$

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2L \sqrt{\frac{\rho S}{T}}$$

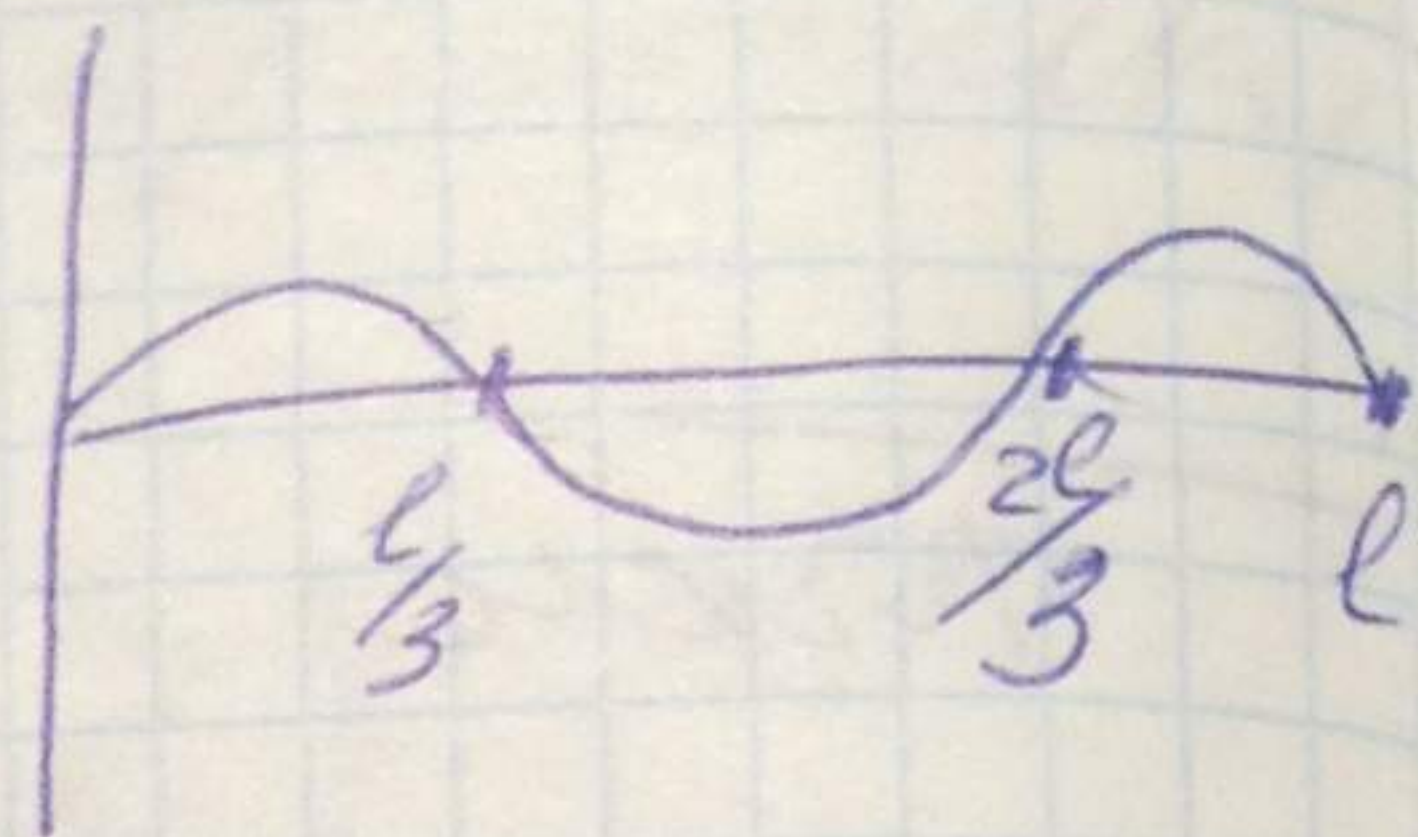
закон Мерсона

T - сила натяжения струны

(Задание)

(Задача) поставлена уже есть
 был задан.

$$\begin{cases} \varphi(x) = \sin \frac{3\pi}{l} x \\ \psi(x) = 0 \end{cases}$$



$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{3\pi}{l} x \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x dx =$$

$$= \frac{1}{l} \int_0^l \left[\cos \frac{(3-n)\pi}{l} x - \cos \frac{\pi}{l} (3+n)x \right] dx =$$

если $n \neq 3$, то.

$$\frac{1}{l} \int_0^l \cos \frac{3-n}{l} x dx = \frac{1}{(3-n)\pi} \sin \frac{(3-n)\pi}{l} x \Big|_0^l = 0$$

$$\frac{1}{l} \int_0^l \cos \frac{3+n}{l} x dx =$$

$= 0$

если $n = 3$.

тогда $= 0$.

тогда $\neq 0$;

$$\frac{1}{l} \int_0^l 1 dx = 1$$

$$A_{n=3} = 1 \text{ или } A_3 = 1$$

$$B_n = 0$$

$$\begin{cases} \text{if } n \neq 3, \text{ то } A_n = 0 \end{cases}$$

Решение имеет вид:

$$u(x, t) = u_3(x, t) = \cos\left(\frac{3\pi}{L} at\right) \sin\left(\frac{3\pi}{L} x\right)$$

ряды

для u_3

2 части функции

ур. ~~параболич~~ типа
инер.

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xt} + a_{22} u_{tt} + F(u, u_x, u_t) = 0$$

$$a_{12}^2 - a_{11} a_{22} > 0 \text{ — инер.}$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

$$a_{12} = 0, a_{11} = a^2, a_{22} = -1$$

параболич. тип

$$u_t = a^2 u_{xx} + \dots$$

$$a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = 0 \text{ (параболич.)}$$

$$a_{12} = 0, a_{11} = a^2, a_{22} = 0$$

ряды о нагревании

переноса тепла

— параболич.

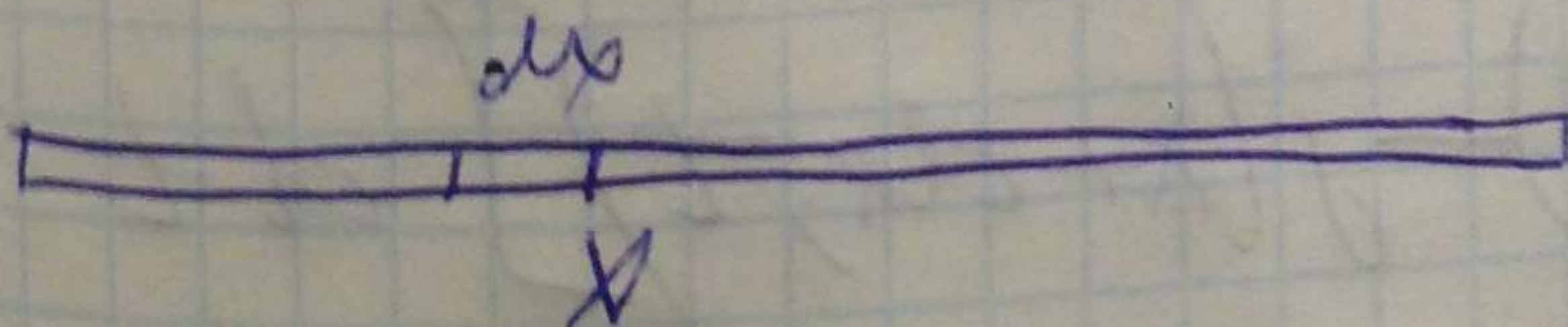
3:23

температура в центре

сегмента считается

в центре сегмента.

$u(x, t)$ — темпер.

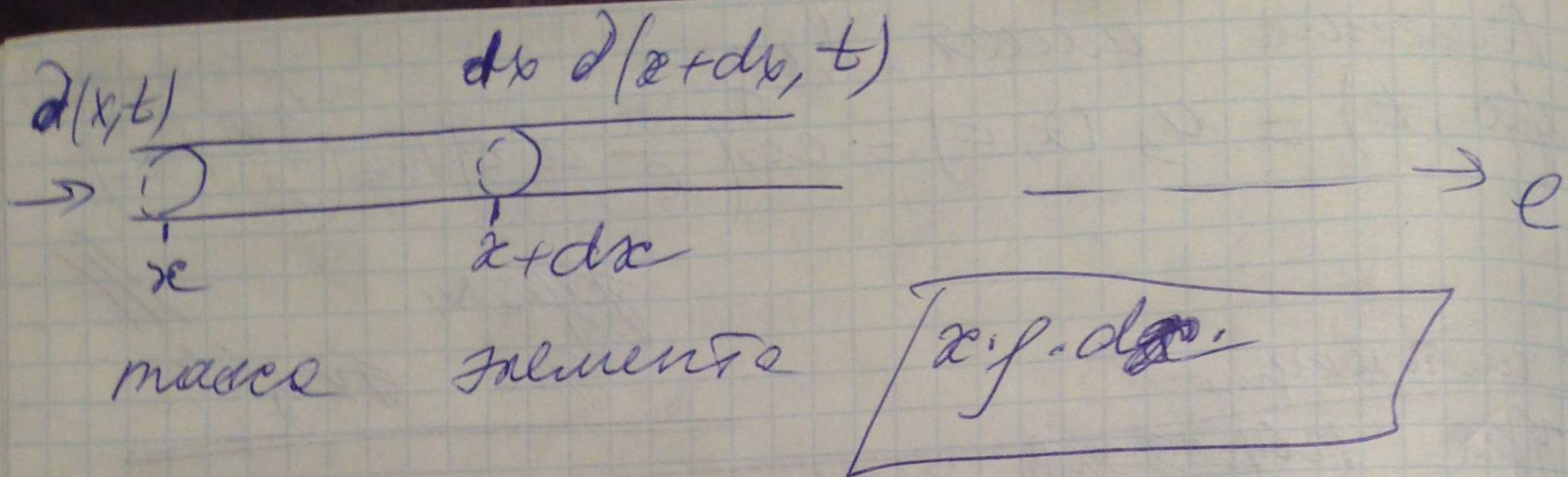


температура стенки $\Rightarrow$

температура

у поверхности

большая часть сегмента



температура материала с
 темп на нагревание (охлаждение)
 стержня

$$\rho \delta dx \cdot c (u(x, t+dt) - u(x, t)) = dQ$$

$$\int_{\text{масса}} [j(x, t) - j(x+dx, t)] dt = dQ$$

поток через стержень

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} dt dx = [j(x, t) - j(x+dx, t)] dt$$

поток тепла — количество тепла
 проходящее через стержень
 за единицу времени

$$j(x, t) = -K(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad K - \text{зав. от температуры.}$$

закон Фурье

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} dt dx = [j(x, t) - j(x+dx, t)] dt =$$

$$= [K(u(x+dx, t)) \frac{\partial u}{\partial x}(x+dx, t) - K(u(x, t)) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)] dt$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{dt} = \frac{\partial}{\partial x} k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} dx dt$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{\partial}{\partial x} k(u(x,t)) \frac{\partial u}{\partial x}$$

k - коэффициент теплопроводности

if $k = \text{const}$, то:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

если есть внешн. источник тепла

$F(x,t)$ - количество тепла пр-х.

вер. времени на единицу S .

15:47

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{\partial}{\partial x} k(u(x,t)) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{F(x,t)}{\rho c S}$$

f, F - могут меняться.

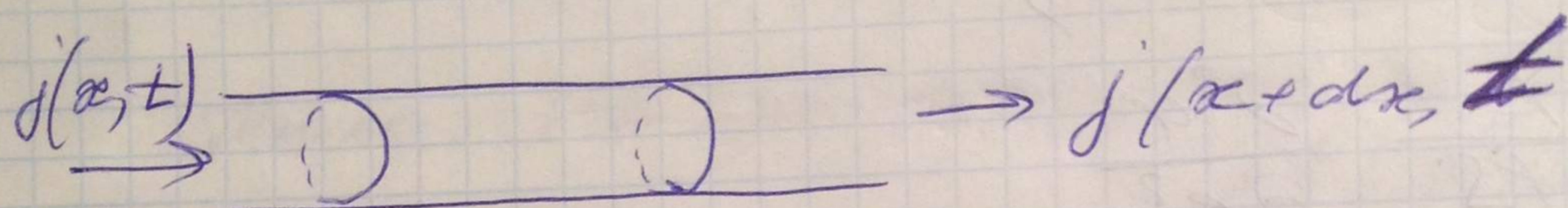
True

$$f = \frac{F}{\rho c S}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

Задача диффузии

Есть точка источника, в которую все вещество сразу в момент времени t сосредоточено. В момент времени t концентрация вещества в точке x равна $j(x, t)$.



$$S dx (u(x, t+dt) - u(x, t)) = dm$$

изменение вещества в объеме $S dx$

$$S [j(x, t) - j(x+dx, t)] dt + f(x, t) dt dx = dm$$

$$S [j(x, t) - j(x+dx, t)] dt = S dx \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

D — коэффициент диффузии

$$j(x, t) = -D \frac{\partial u}{\partial x}$$

и Фурье
(и универсально для жидкостей)

Все ост. — тоже самое

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ если } D = \text{const.}$$

если нет: $D(u)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial D(u)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}$$

если заданы

стенки

просачив

Т-поток газа через стенку

вер. найти в у времени

тогда добавляе +

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{F(x, t)}{S}$$

Постановка краевых задач.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

известная
функция

$$\frac{k}{\rho c} = a^2$$

$$a^2 = D$$

тут же

тип теплопроводности

$$u(0, t) = \mu_1(t)$$

$$u(l, t) = \mu_2(t)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

наз. распределение температур
в момент времени

если поток
на правую

концы уходят за

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \mu_3(t)$$

$$\mu_3(t)$$

20.11.2015 Краевые задачи температурного (параболич.)

$$X_n(x) = \sin$$

(метод Фурье)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

x пространств $0 \leq x \leq l$

кр. усл.

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (1.3)$$

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0$$

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$X(x) \cdot T'(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t)$$

$$\frac{T'}{T} = a^2 \frac{X''}{X}$$

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$X'' + \lambda X = 0, \quad \lambda > 0 \quad \lambda > 0 \text{ (иначе не дифф.)}$$

$$X(x) = a \cos \sqrt{\lambda} x + b \sin \sqrt{\lambda} x$$

из (1.2): $a \cos \sqrt{\lambda} x = 0 \quad a = 0$

из $b \sin \sqrt{\lambda} l = 0$,

$$\Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

$$\sqrt{\lambda} l = \pi n$$

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$$

то есть
мы будем иметь
для $n = 1, 2, \dots$

Борн

$$X_n(x) = b_n \sin \frac{\pi n}{l} x$$

$$T' = -a^2 \lambda T$$

$$T' = -a^2 \lambda T$$

$$T(t) = C e^{-a^2 \lambda t}$$

1. может принимать
только дискретные значения
(квантуется)

$$T_n(t) = C_n e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t}$$

$$u_n(x, t) = X_n \cdot T_n = C_n e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi n}{l} x$$

- если заданы начальные условия
(не равны нулю)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi n}{l} x$$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (1.4)$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{l} x$$

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \quad (1.5)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \right) e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x$$

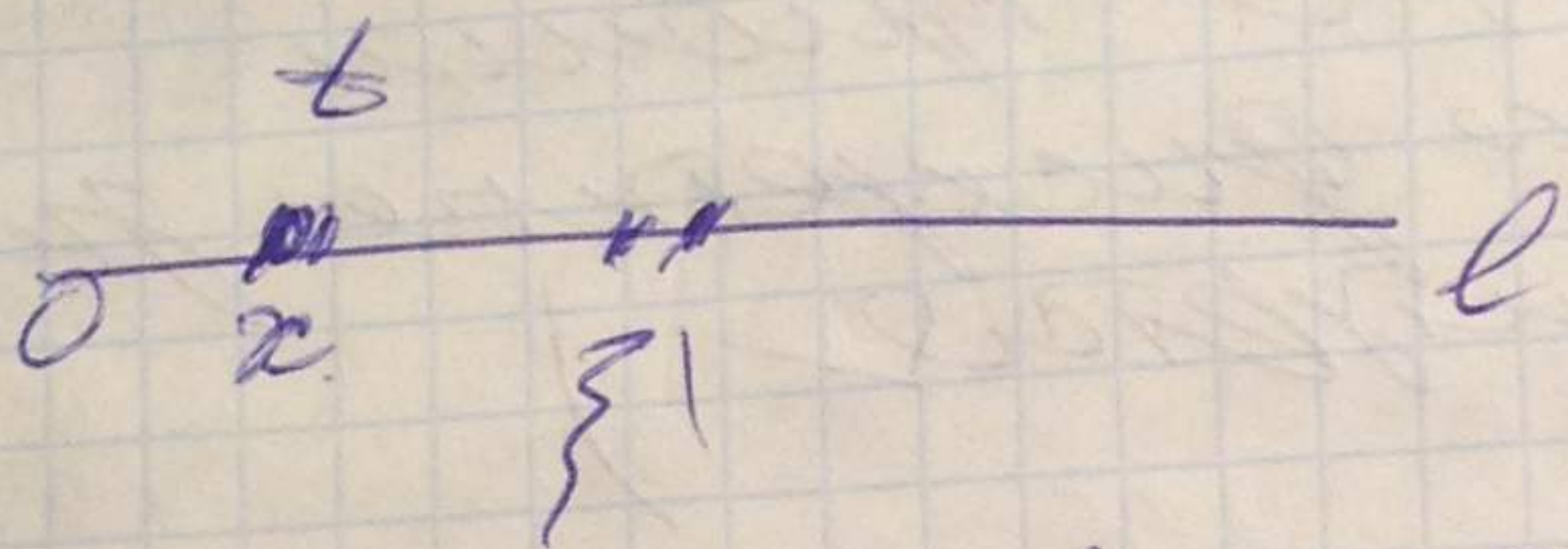
$$= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi n}{l} \xi \right) d\xi e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right)$$

- с помощью

$$= \int_0^l G(x, t, \xi) \cdot \varphi(\xi) d\xi \quad (1.6)$$

$$G(x, t, \xi) = \frac{2}{e} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi k}{e}\right)^2 t} \sin \frac{\pi k}{e} x \sin \frac{\pi k}{e} \xi \quad (1.7)$$

Фурье



матрица нач. условия
 Вектор в 0 момент
 непрерывность $\varphi(\xi)$

Задача II

упр: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$ по (2.1)

$$u(x, t) = u(l, t) = 0 \quad (2.2)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad (2.3)$$

$$u(x, 0) = \sum C_n \sin \frac{\pi n}{e} x$$

$$u(x, t) = \sum C_n e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{e^2} t} \sin \frac{\pi n}{e} x$$

$$u(x, t) = \sum U_n(t) \cdot \sin \left(\frac{\pi n}{e} x \right) \quad (2.5)$$

$$f(x, t) = \sum f_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n}{e} x \quad (2.4)$$

$$f_n(t) = \frac{2}{e} \int_0^e f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{e} \xi d\xi \quad (2.6)$$

$$\sum u_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n}{L} x = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 \sin \frac{\pi n}{L} x u_n(t)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n}{L} x$$

$$u_n(t) = - \underbrace{\left(\frac{a \pi n}{L} \right)^2}_{\alpha} u_n + f_n(t)$$

$$\dot{y} = \alpha y + \varphi(t), \quad y(0) = y_0$$

$$y = e^{\alpha t} \left[y_0 + \int_0^t e^{-\alpha \tau} \varphi(\tau) d\tau \right]$$

$$u_n(0) = 0 \quad (\text{by 2.3})$$

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{a \pi n}{L} \right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\left(\frac{a \pi n}{L} \right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau$$

fig. 100

$$\dot{y} = \alpha y +$$

$\varphi(t)$

$$y(0) = y_0$$

$$y = e^{\alpha t} \left[y_0 + \int_0^t e^{-\alpha \tau} \varphi(\tau) d\tau \right]$$

Задача III

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(l, t) = \mu_2(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = \Phi(x) \quad (3.3)$$

температура
на границах
диф-ма
хорошая функция

$$V(x, t) \quad \text{но:} \quad V(0, t) = \mu_1(t)$$

$$V(l, t) = \mu_2(t)$$

пример
вытеснение
 μ_1 и μ_2

$$V(x, t) = \mu_1 + \frac{x}{l} (\mu_2 - \mu_1)$$

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + V(x, t)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$$

Задача 3.II

$$u_1(0, t) = u_1(l, t) = 0$$

$$u_1(x, 0) = \psi(x) = \Phi'(x) - V(x, 0)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f(x, t), \text{ где}$$

$$f(x, t) = F(x, t) + \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}$$

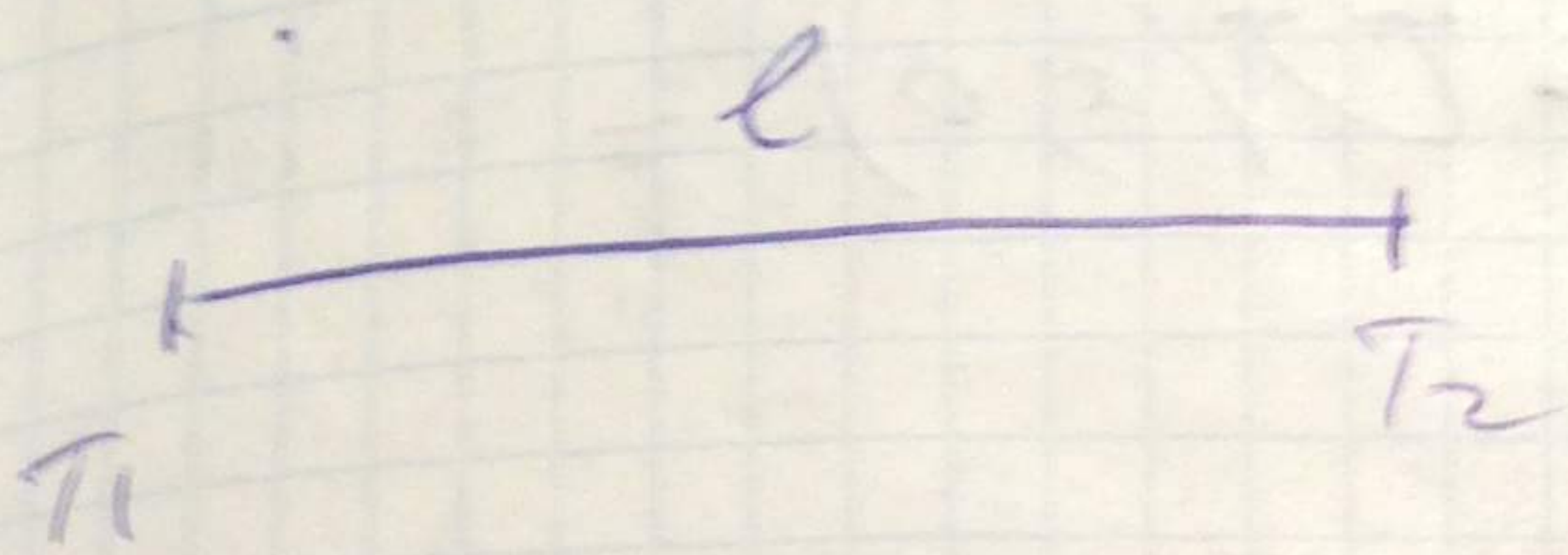
3.II

$$\begin{cases} u_2(0, t) = u_2(l, t) = 0 \\ u_2(x, 0) = 0 \end{cases}$$

(28.11.2015)

Пример

$$T_1, T_2 = \text{const}$$



внутренняя $\frac{\partial T}{\partial x}$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_2 - T_1}{l}$$

нагр. распр. тем

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l} x$$

уравн теплопроводности

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \rho k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + y(x), \quad k = \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right]$$

коэф теплопроводности

плотность на единицу массы

$$[\rho] = \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$$

$$[k] = \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right]$$

$$[c] = \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right]$$

и температура

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + F, \quad a^2 = \frac{k}{\rho c}, \quad F = \frac{y(x)}{\rho c}$$

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + V(x, t)$$

$V(x, t)$ — решение уравн крайних условий

$$\text{кр. усл: } u(0, t) = T_1$$

$$u(l, t) = T_2$$

$$u(x, 0) = P(x)$$

нач усл.

$$V = T_1 + \frac{x}{l} (T_2 - T_1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \end{cases}$$

$$u_1(x, 0) = \varphi(x) = \Phi(x) - U(x, 0) =$$

$$= T_0 \cdot \ln\left(\frac{\pi m_0 x}{e}\right)$$

кр. усл - нулевые

$$u_1(0, t) = u_1(l, t) = 0.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f(x, t) \\ f(x, t) = \mathbf{F}(x, t) - \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \end{cases}$$

находим

в ур-еи координат

были интегралы

$$\frac{2}{e} \int_0^l \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi r}{l} x\right) dx = \begin{cases} 0, & n \neq r \\ 1, & n = r \end{cases}$$

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{e}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{e} x\right)$$

$$C_n = \frac{2}{e} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{e} \xi\right) d\xi = \begin{cases} 0, & n \neq m_0 \\ 1, & n = m_0 \end{cases}$$

все интегралы = 0, если

$$u_1(x, t) = T_0 \cdot e^{-\left(\frac{\pi m_0 a}{e}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi m_0}{e} x\right)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{e} x\right) \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{e}\right)^2 (t-\tau)} \cdot f_n(\tau) d\tau$$

$$f_n(\tau) = \frac{2}{e} \cdot \frac{2}{e} \int_0^l \sin\left(\frac{\pi n}{e} \xi\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi m_0}{e} \xi\right) d\xi$$

$$f_n = 0, n \neq n_0$$

$$f_n = \frac{f_0}{\text{scf}}$$

$$u_2(x, t) = \frac{f_0}{\text{scf}} \sin \frac{\pi n_0}{l} x \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n_0}{l} a\right)^2 (t-\tau)} d\tau =$$

$$= \frac{f_0}{\text{scf}} \sin \left(\frac{\pi n_0}{l} x \right) \cdot \frac{e^{-\left(\frac{\pi n_0}{l} a\right)^2 t} \cdot t}{\left(\frac{\pi n_0}{l} a\right)^2} \left[e^{\left(\frac{\pi n_0}{l} a\right)^2 t} - e^0 \right] =$$

$$= \frac{f_0}{\text{scf}} \sin \left(\frac{\pi n_0}{l} x \right) \left[1 - e^{-\left(\frac{\pi n_0}{l} a\right)^2 t} \right]$$

график t из exp.
где односторонний
процесс

Общее решение

$$u(x, t) = T_0 \sin \left(\frac{\pi n_0}{l} x \right) e^{-\left(\frac{\pi n_0}{l} a\right)^2 t} +$$

$$+ \frac{f_0 l^2}{8k \beta \pi^2 n_0^2 a^2} \sin \left(\frac{\pi n_0}{l} x \right) \left[1 - e^{-\left(\frac{\pi n_0}{l} a\right)^2 t} \right] +$$

$$+ T_1 + \frac{x}{l} (T_2 - T_1)$$

при $t \rightarrow \infty$ $\textcircled{1} \rightarrow 0$ и $\textcircled{2} \rightarrow 0$.

Тогда решение примет вид:

$$u(x, t) \rightarrow \frac{f_0 l^2}{8k \beta \pi^2 n_0^2 a^2} \sin \left(\frac{\pi n_0}{l} x \right) + T_1 + \frac{x}{l} (T_2 - T_1)$$

$$\int_0^t e^{-\alpha \tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha \tau} \Big|_0^t +$$

ср. установивш.
темпер.

if heat source, установивш. $f_0 \rightarrow 0$
" $u(x, t) = T_1 + \frac{x}{l} (T_2 - T_1)$

температура в стержне

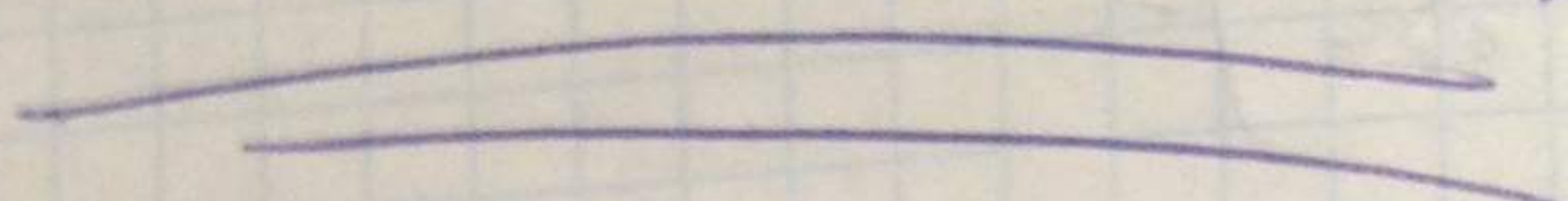
в стержне

$T(x)$

T_1

T_2

задача
для стержня



энд параболы
36:24

Мат урн

урн эллиптического типа

(стационарная задача теплопроводности)
когда температура зависит
и от времени

теплопровод.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$a = 1$$

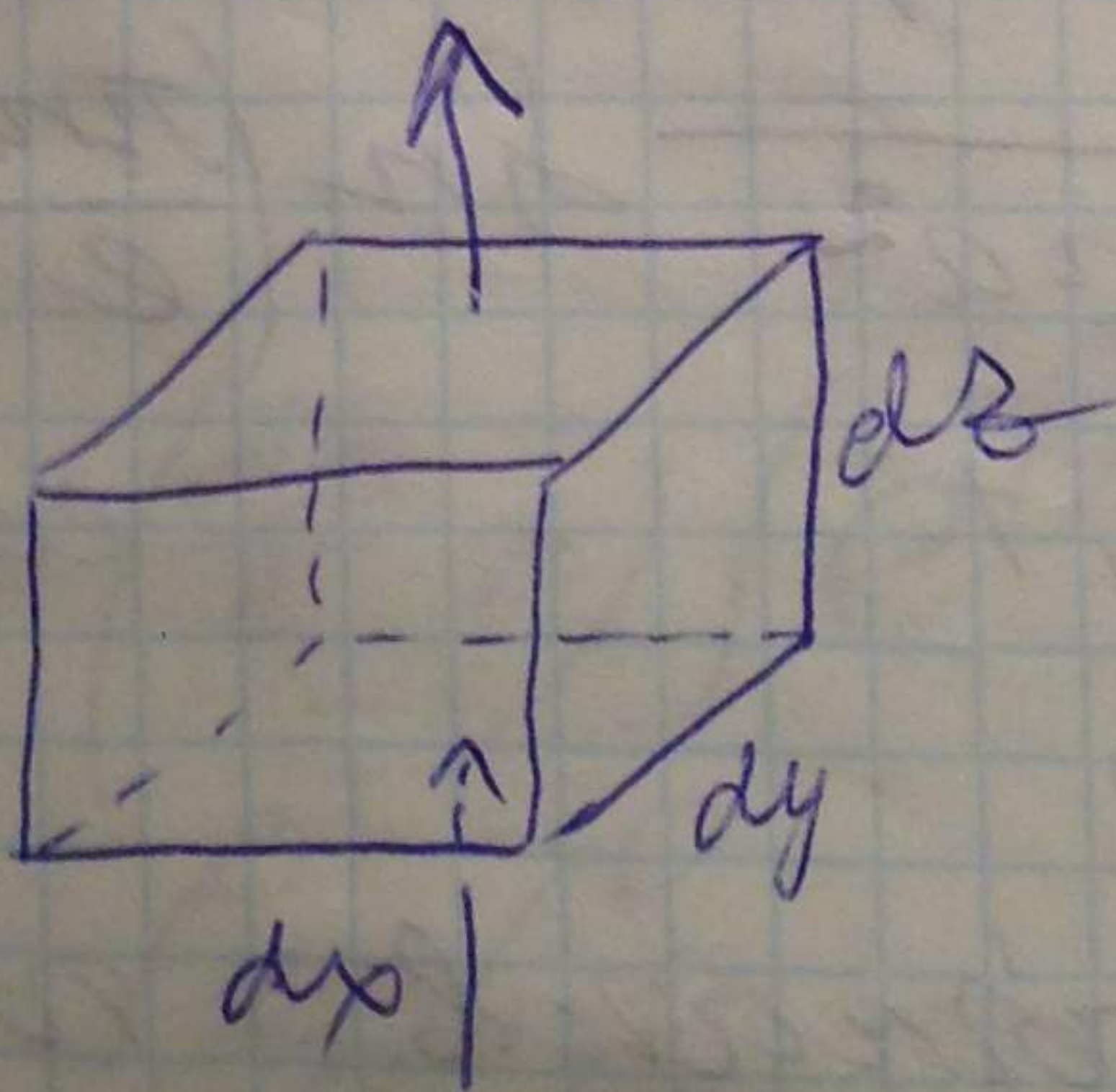
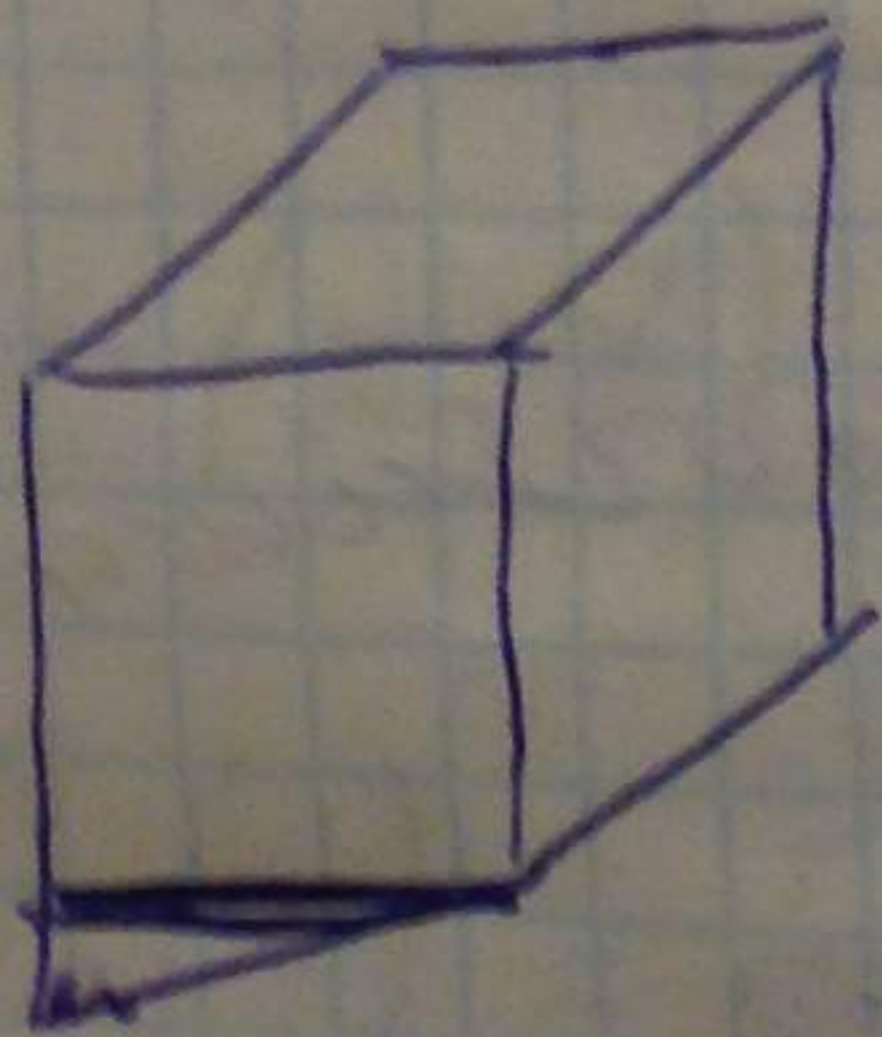
$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \Delta$ - оператор Лапласа

$\Delta u = 0$ - простейшее уравнение Лапласа

Если нет внутр. источников

то $\Delta u = -f$ - уравнение Пуассона

Как в трехмерном случае вывести



now вписывает
 upper box. range $j_x(x, y, z)$ (входит x)
 $j_x(x, y, z) \cdot dy dz - j_x(x + dx, y, z) \cdot dy dz +$
 $+ [j_y(x, y, z) - j_y(x, y + dy, z)] dx dz +$
 $+ [j_z(x, y, z) - j_z(x, y, z + dz)] dx dy \cdot dt =$
 minus upper наверх криво

$$= \rho \frac{\partial u}{\partial t} dt = \rho \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dz$$

ρ - плотность
 c - теплоемкость

Δ расширяем
 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ по x и по y

$$j_x = -K \frac{\partial u}{\partial x} \quad j_y = -K \frac{\partial u}{\partial y} \quad j_z = -K \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dz dt = K \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] dx dy dz dt$$

$$a^2 = \frac{K}{\rho c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Тепло может быть анизотропным
 ($k_x \neq k_y \neq k_z$ в кристаллах)

если стационарный процесс (у - не
 зависит от t)
 тогда дифференциал с оператором Лапласа

нахождение из теории поле
 — скалярное вектор

$f(x, y, z)$
 $\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$

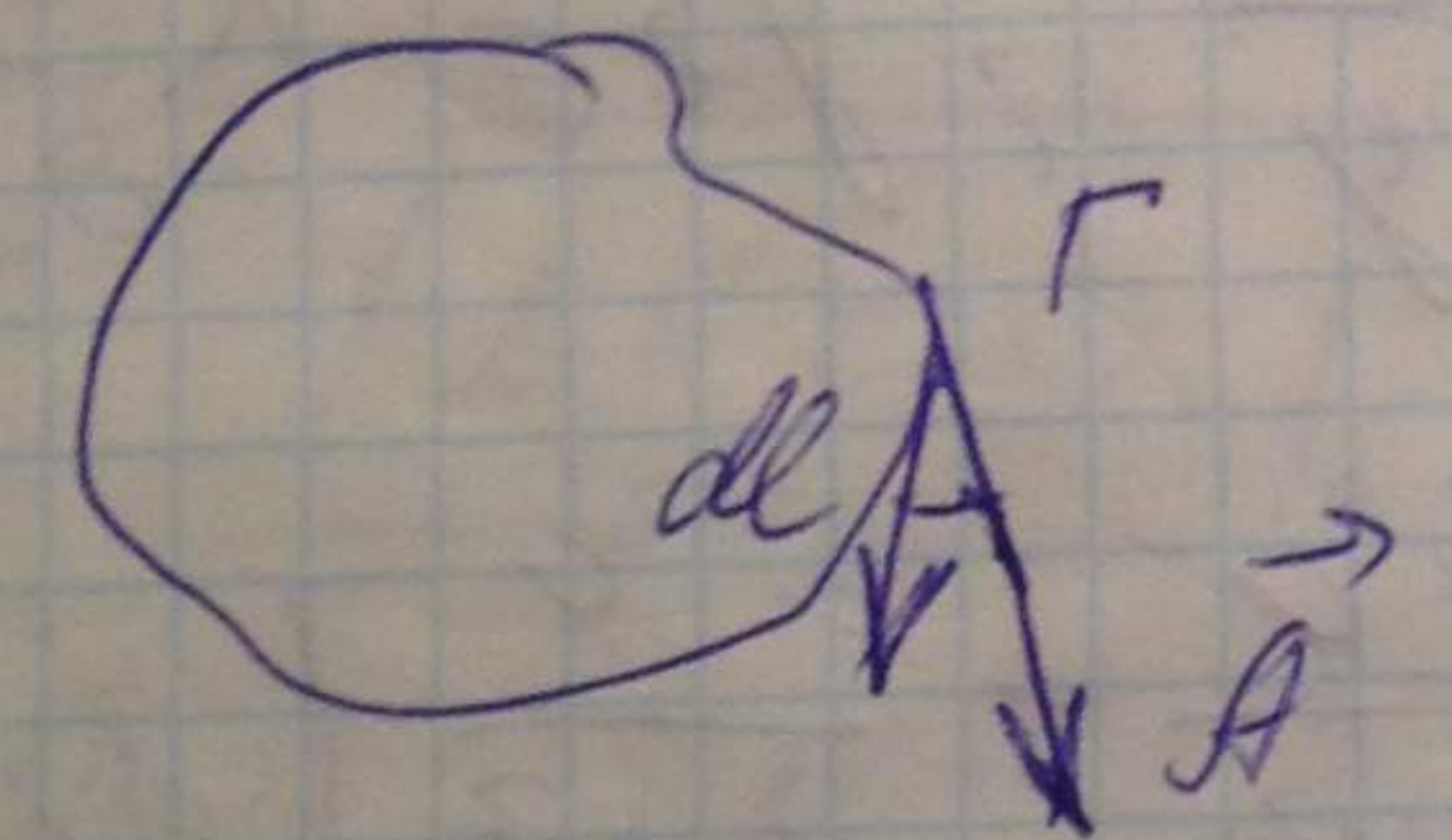
$\vec{j}(x, y, z) = (j_x(x, y, z), j_y(x, y, z), j_z(x, y, z))$

$\text{div } \vec{j} = \frac{\partial}{\partial x} j_x + \frac{\partial}{\partial y} j_y + \frac{\partial}{\partial z} j_z$

$\text{div grad } f = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} =$
 $= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

безвихревые поле — $\text{rot } \vec{A} = 0$
 Если поле $\vec{A}(x, y, z)$

в каждой точке (x, y, z) задан вектор $\vec{A} \Rightarrow$ задано поле



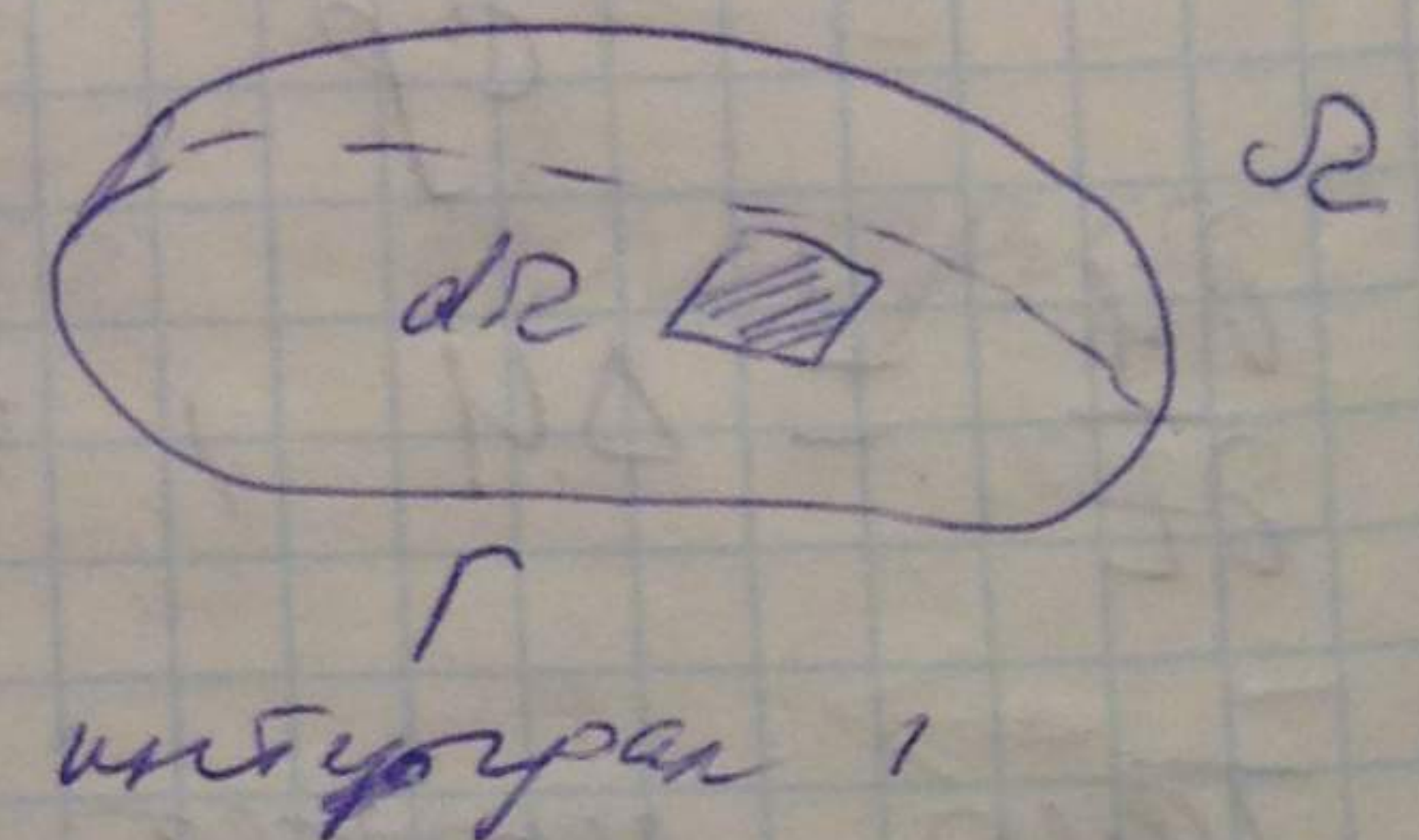
$\oint_{\Gamma} (\vec{A}, \vec{\tau}) dl = 0$

1:00:00

$\vec{\tau}$ — тангенциальный вектор (вектор касательной)

Теорема Стокса:
 если векторное поле

$\oint_{\Gamma} (\vec{A}, \vec{\tau}) dl = \int_{\Omega} (\text{rot } \vec{A}, \vec{n}) d\Omega$
 $\stackrel{=0}{=}$



$\text{rot } \vec{A}, \vec{n} d\Omega \Rightarrow$
 $\text{rot } \vec{A} = 0$

$\text{rot } \vec{A} =$

$\vec{y}$
 $x \rightarrow y$

поле
 вектор
 $\vec{A} =$

(скаляр)

поле

$\frac{\partial}{\partial y} \vec{A}$

криволинейный интеграл

$\Rightarrow$

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) -$$

$$\vec{e}_y \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

$$\vec{e}_x \rightarrow \vec{e}_y \rightarrow \vec{e}_z$$

где безвихревое поле

Для того, чтобы поле было безвихревым $\Leftrightarrow$ $\exists$ скалярная $\varphi(x, y, z)$:

$$\vec{A} = \text{grad } \varphi$$

(скалярная φ называется потенциалом)

$$\text{rot } \vec{A} = 0$$

Для всякой стороны

$$\frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

кроме тех случаев, когда φ не зависит от некоторых переменных

$\Rightarrow \circ$

$$f = x^2 + y - 3x^5 y^3 - 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x - 15x^4 y^3 - 1 \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1 - 9x^5 y^2 \right.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -45x^4 y^2$$

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -45x^4 y^2 \right.$$

Безвихревое течение (иротационное)

Поток безвихревое $\vec{v} = \nabla \varphi$

(в каждой точке поток равен нулю) $\vec{v} = \nabla \varphi$
 $\vec{v} = \text{grad } \varphi$
 $\text{div } \vec{v} = 0$
 $\text{div grad } \varphi = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = 0$

если есть источники:

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi$$

$$\text{div } \vec{v} = f$$

$$\text{div grad } \varphi = f$$

разнообразие

задач

(уравнение Пуассона) в граничных условиях.

и в значении f .

11.12.2015

задача: в нем есть проводящий
 среде протекает ток.
 заряд не накапливается.

$$\text{div } \vec{j} = \frac{\partial}{\partial x} j_x + \frac{\partial}{\partial y} j_y + \frac{\partial}{\partial z} j_z$$

скал. велич.

сколько вехи старты и вехи
 λ -проводимости $\frac{1}{\lambda}$ - сопротивление

$$E = \frac{j}{\lambda}$$

$$\text{div } \vec{j} = 0$$

2-я Максвелла

μ - магн проницаемость

$\vec{E}$ - напряек электр поле

$$\frac{1}{c} \vec{H} = \text{rot } \vec{E}$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{E} = 0$$

H

$\Rightarrow$ безвихревое поле E -

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \text{ (принято писать "—")}$$

$$0 = \text{div } \vec{j} = \text{div } \lambda \vec{E} = \lambda \text{div } \vec{E} = -\lambda \text{div grad } \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta \varphi = 0 \quad \varphi - \text{потенциал}$$

из стационарного процесса (из 2-й Максвелла)

$$\text{Максвелла } \text{rot } \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\text{grad } \varphi}$$

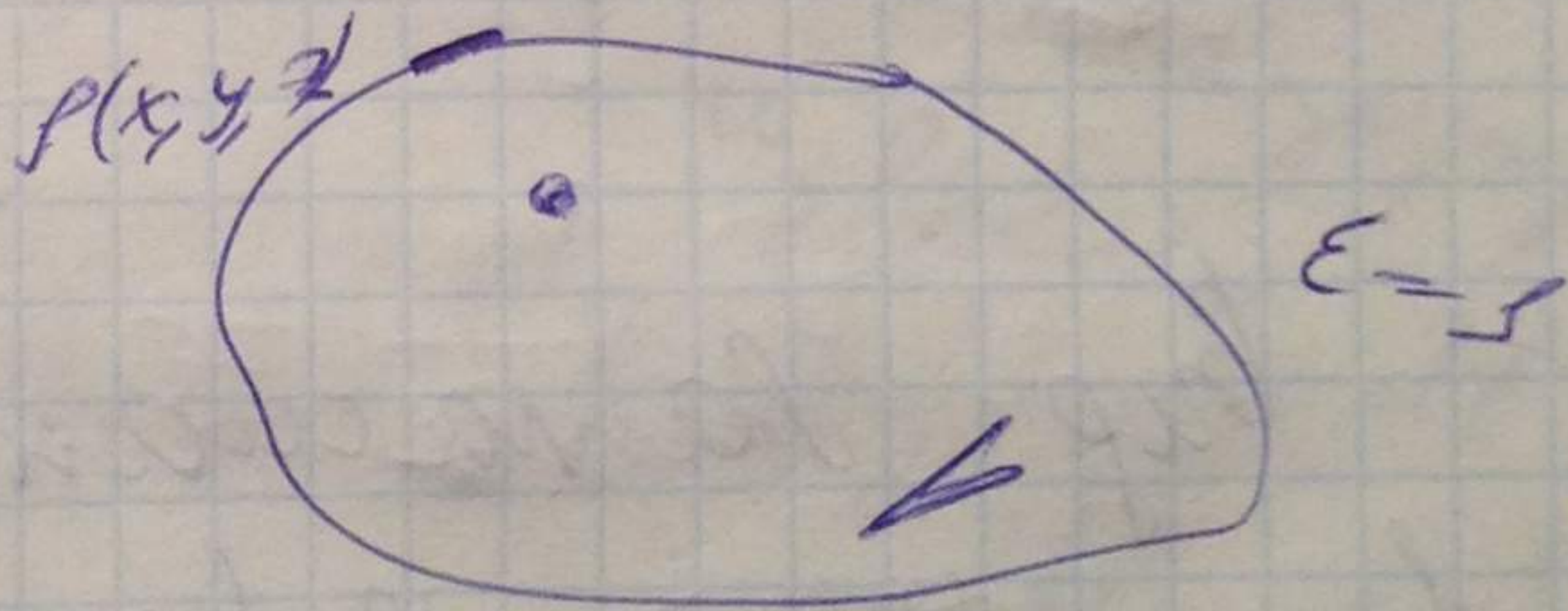
как известно поле E ?

$f(x, y, z)$ — объемная плотность заряда

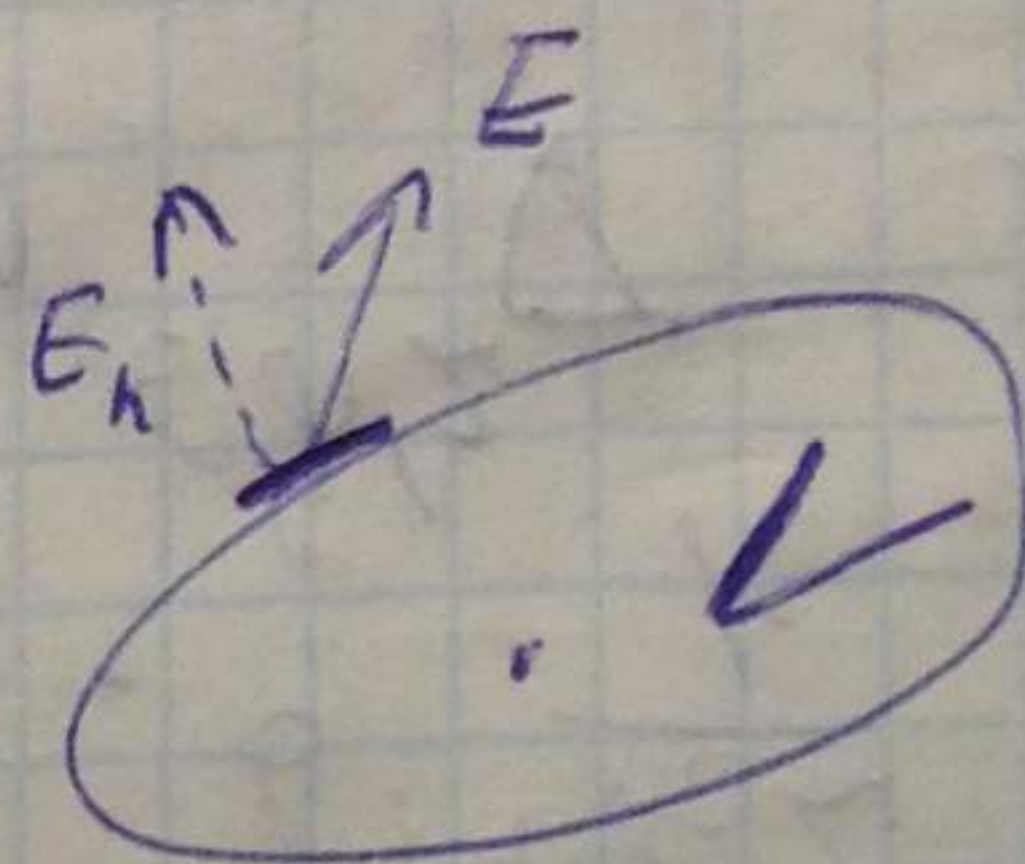
1-я Максвелла: $\text{div } \vec{E} = 4\pi \rho$

$$\epsilon = 1$$

из 1-й Максвелла:



$$\oint_S E_n dS = 4\pi \iiint_V \rho dV$$



П. Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S E_n dS = \iiint_V \text{div } \vec{E} dV$$

$$\Rightarrow 4\pi \iiint_V \rho dV = \iiint_V \text{div } \vec{E} dV$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -4\pi\rho$$

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho$$

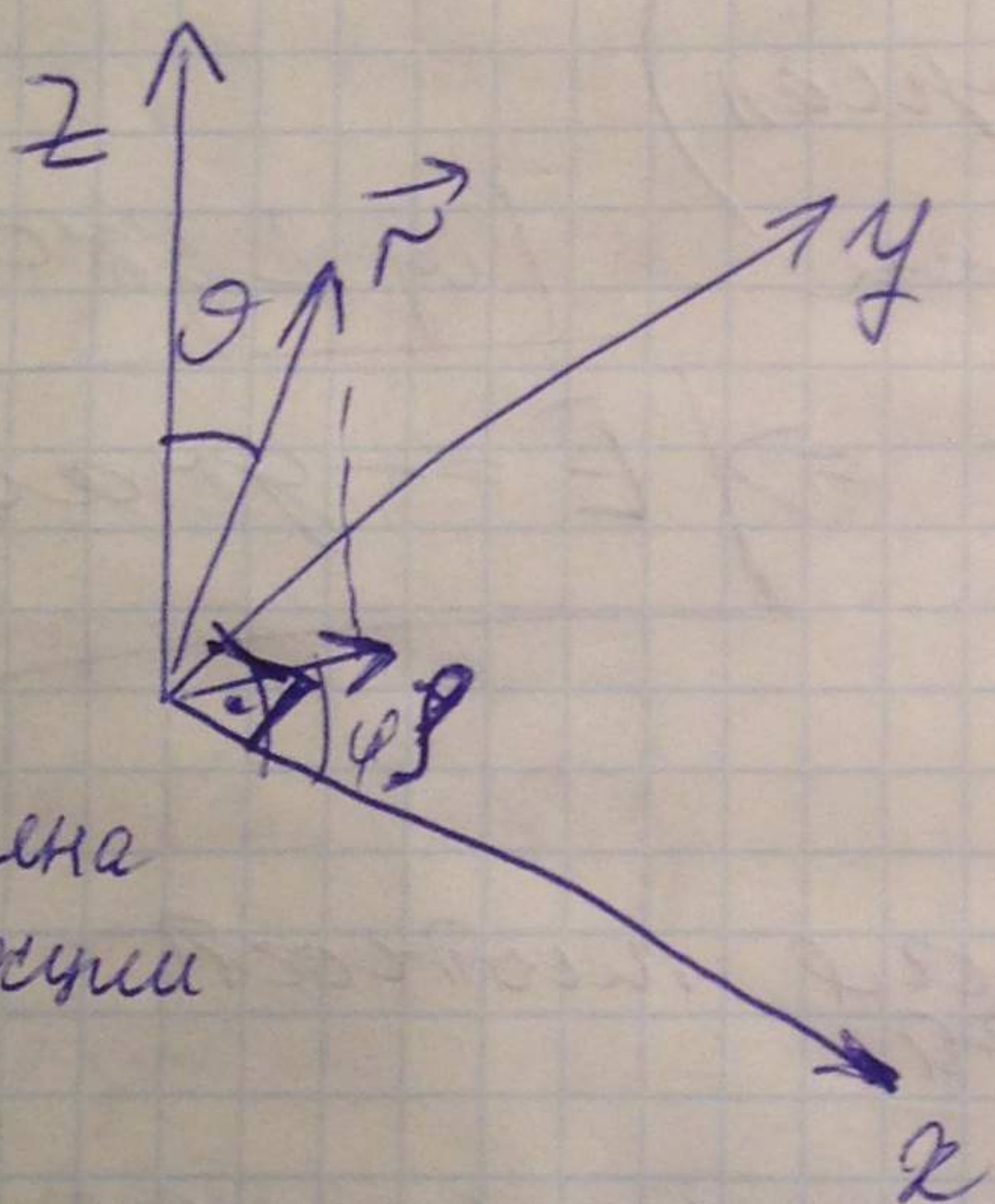
$$\Delta\varphi = *f \quad - \text{уравнение Пуассона.}$$

Задача Эл. поле

Лапласиан в декартовых координатах

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Цилиндрич. коорд



ρ -луча проекции

$$(x, y, z) \rightarrow (\rho, \varphi, z)$$

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

сферич. коорд.

$$(x, y, z) \rightarrow (r, \varphi, \theta)$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\rho = r \sin \theta$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

Вид Лапласиана в сферич. координатах:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

цилиндр. координ.

$$\Delta_{\varphi z} u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

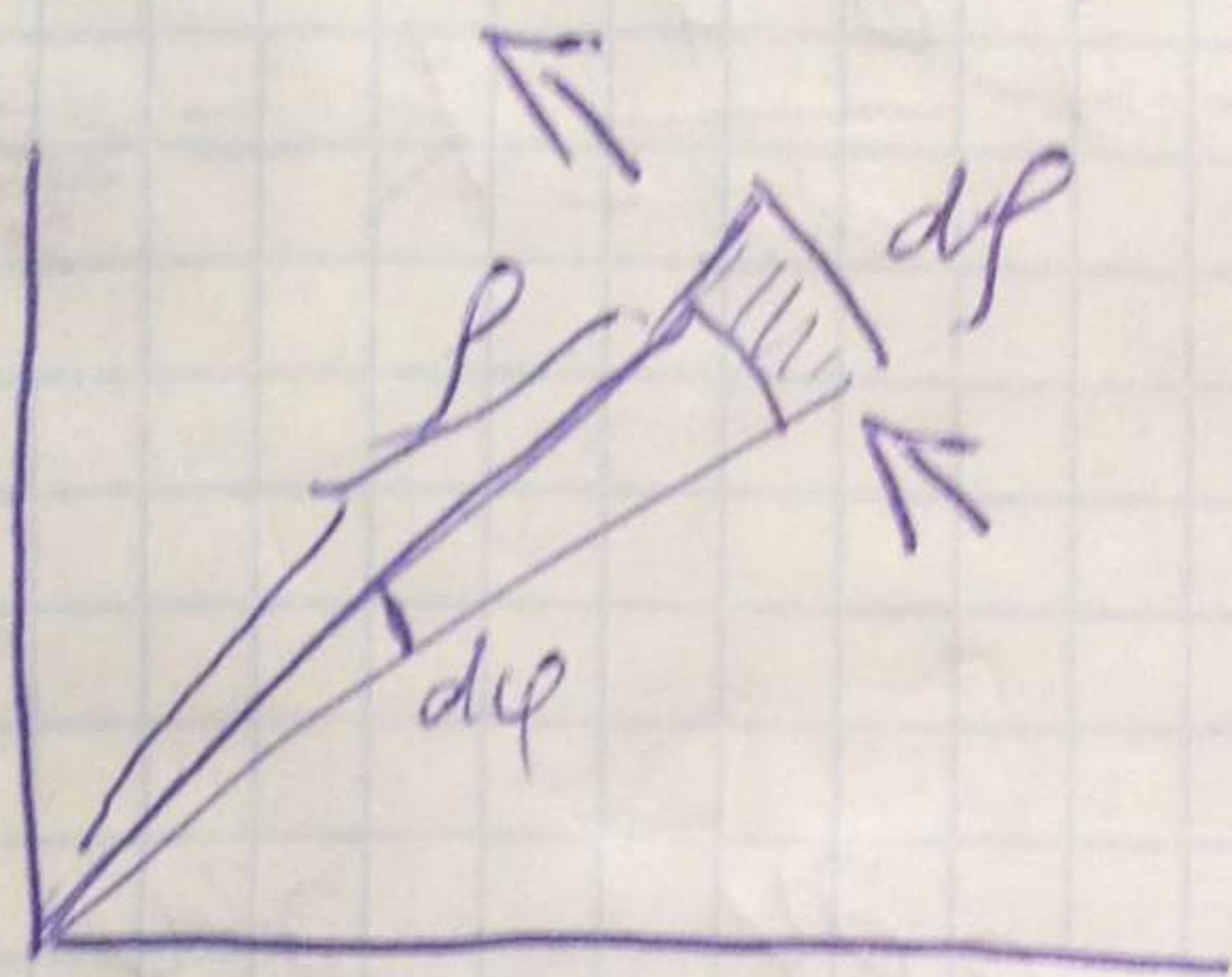
Если лапласиан в декарт.
Когда перейти к новым

цилинд. координ.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

(здесь $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ - не
измен.)

Задача распр. тепла по пр-ву



есть соот. $\odot z$
в объеме:
крив. параметризов.
полюс

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = -K \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

K - коэффициент
30:00

втекает поток $\leftarrow K$ вытекает

$$\left(-K \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\rho, \varphi} - \left(-K \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\rho, \varphi + d\varphi} \right) \right) \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot dz$$

$$+ \left[-K \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho, \varphi} \cdot \rho \cdot d\varphi - \left(-K \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho + d\rho, \varphi} \cdot (\rho + d\rho) \cdot d\varphi \right) \right] \cdot dz \cdot dt$$

$$= d\rho \cdot d\varphi \cdot dz \cdot dt \left[\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\rho, \varphi, z, t + dt} - \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\rho, \varphi, z, t} \right]$$

d - толщина
c - теплоемкость

температура

$$K \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} df d\varphi dz dt +$$

$$+ K \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{\partial u}{\partial r} \cdot df d\varphi dz dt =$$

$$= dc \underbrace{\int df d\varphi dz dt}_{\text{constant like } \int df d\varphi dz dt} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$K \cdot \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + K \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} K =$$

$$= dc \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{dc}{K} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

лапласиан в цилиндрич. сист. координат

Задача в сферич. координатах.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \Rightarrow$$

$$r^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \text{const} = C_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = C_1 r^{-2}$$

в сферич. координ.

$$u = \frac{C_1}{r} + C_2$$

где сферич.

симметрич. задачи

$$u = \frac{1}{r}$$

— фундаментальное решение Лапласа

составляет потенциал, как возникает
 если заряды распределены
 2. вокруг заряда

сфериче сим. — центрально
 симметричный заряд

заряд не зависит от z
 зависит только от ρ
 — осесимметричная
 заряд для потенциала

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = C_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{C_1}{\rho}$$

52:
 симметрия

$$\varphi = C_1 \ln \rho + C_2$$

$$\Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 0$$

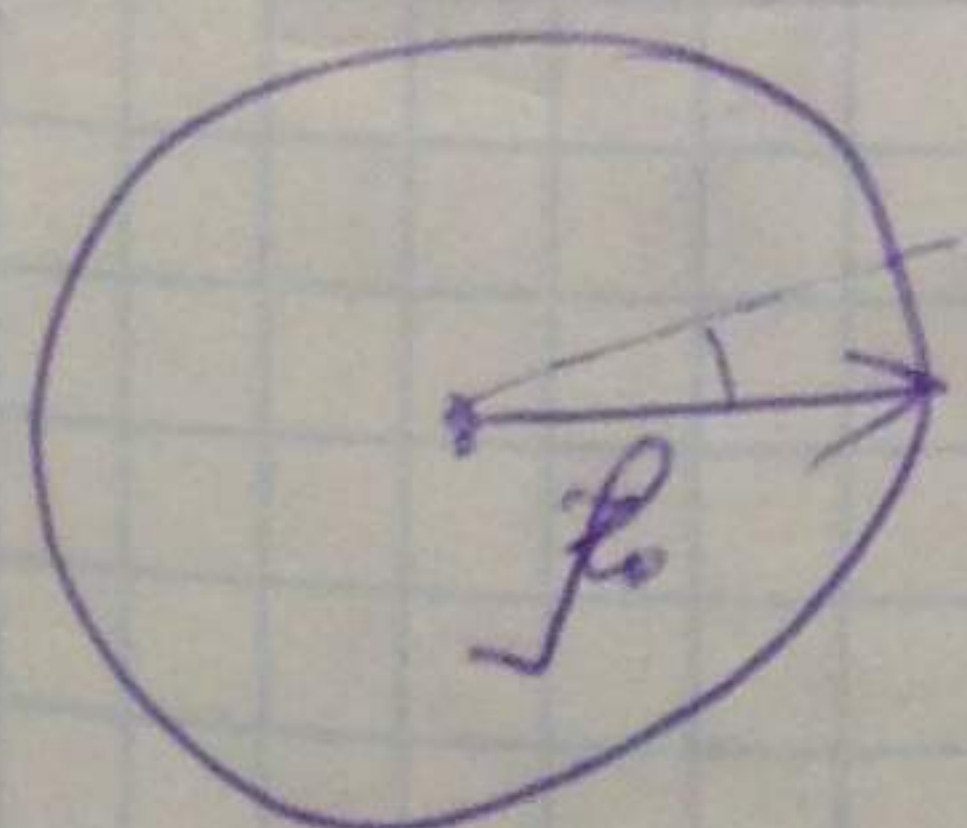
$$\varphi = \ln \rho$$

— фундаментальное
 уравнение Лапласа
 особенность при $\rho = 0$ (удаленная)

задача на круг
 Найти решение ур-я

$$\Delta \varphi = 0$$

$$\varphi(\rho, \varphi) = f(\varphi)$$



$$\varphi(\rho, \varphi) = R(\rho) \cdot \Phi(\varphi)$$

от z ничего не
 зависит.

задача
 потенциал
 на границе
 внутри круга
 потенциал
 ур. ур-ю
 Лапласа

внешний заряд
 круга заряд
 потенциал вне
 круга

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\Phi(\varphi) \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{R(r)}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right)}{\frac{R}{r}} = - \frac{\Phi''}{\Phi} = \text{const} = \lambda$$

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0$$

$$\Phi = A \cos \sqrt{\lambda} \varphi + B \sin \sqrt{\lambda} \varphi$$

по φ функции непрерывные и
периодическая по φ .

$$\psi(\varphi + 2\pi, r) = \psi(\varphi, r)$$

must be

$$\sqrt{\lambda} = n$$

$$\boxed{\lambda_n = n^2}$$

— в силу периодичности
функции по φ .

если $n=0$.

$$\Phi = \text{const}$$

— дискретные
квадратные значения

Ищем R в виде: $R(r) = r^m$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right)$$

$$\frac{R}{r} = n^2$$

...

$$m^2 = n^2$$

$$\boxed{m = \pm n}$$

$$K(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n}$$

внутри круга

$$\bar{\rho}^{-n} = 0$$

ищем:

$$K_n(\rho) = C\rho^n$$

повнимает
особенность

вне круга:

$$K_n(\rho) = D\rho^{-n}$$

Частное решение:

$$u_n(\rho, \varphi) = \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad \text{— внутри круга}$$

$$u_n(\rho, \varphi) = \bar{\rho}^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad \text{— вне круга}$$

Самое решение:

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad \text{внутри круга}$$

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\rho}^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad \text{— вне}$$

Внутри круга:

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

$f(\varphi)$ — в пер. формуле по $1, \cos, \sin$

$$f(\varphi) = \frac{L_0}{2} + \sum (L_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

не даются
продолжить

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos n\xi d\xi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin n\xi d\xi$$

$$A_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$A_n = \frac{a_n}{2^n}$$

$$B_n = \frac{b_n}{2^n}$$

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R_0} \right)^n \left(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi \right)$$